Vorlesung 19:

Roter Faden:

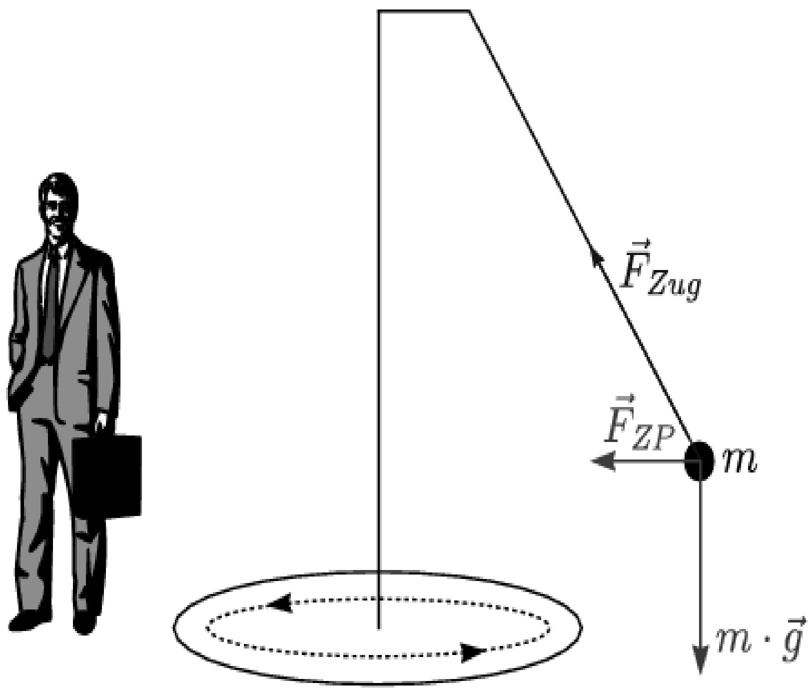
Heute: Scheinkräfte: Zentrifugalkraft
Corioliskraft

Versuche: Rotierende Systeme, Foucault Pendel

Zentrifugalkraft ist eine Scheinkraft, die nur in rotierenden Bezugssystemen auftritt.

① Zentripetalkraft

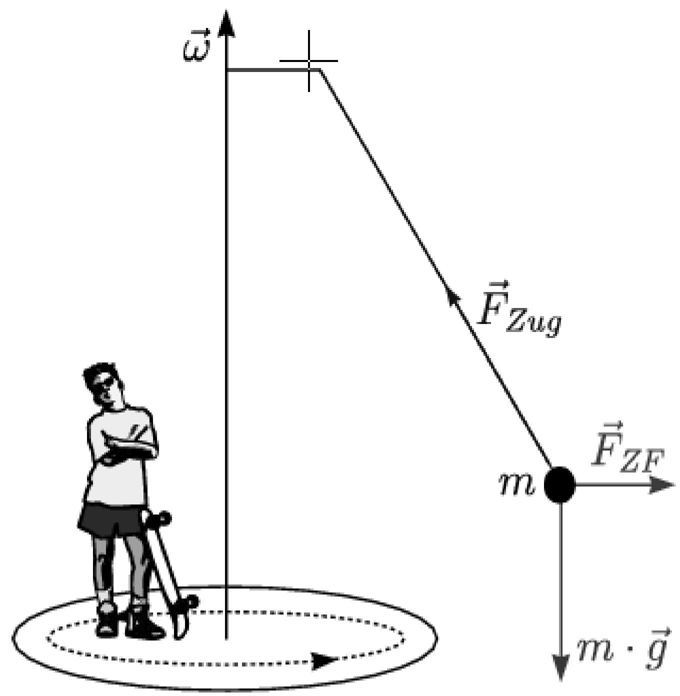
$$\vec{F}_{ZP} = \vec{F}_{Zug} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}_{ZP}$$



② Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{ZF} + \vec{F}_{Zug} + m\vec{g} = \vec{o}$$

$$\vec{F}_{ZF} = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$



$a_{ZP}=a_{ZF}=v^2/r=\omega^2 r$

Beispiele für Zentrifugalkraft

a.) Unsere Geschwindigkeit am Äquator

Schwerelosigkeit: Gravitationskraft und Zentrifugalkraft heben sich auf. (Kräftefreier Raum)

$r = 6380\,\mathrm{km}, T = 24\,\mathrm{h}$ $\quad \omega_{Erde} = 7.3\ 10^{-5}\ s^{-1}$

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{6380\,\mathrm{km} \cdot 2\pi}{24\,\mathrm{h}} = 1670\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 464\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = 0,034\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 0,0034g$$

$\Rightarrow$ Sie wiegen am Äquator 200 g weniger als am Nordpol!

b.) Wie kurz wäre der kürzeste Tag, bei dem Sie noch nicht abheben?

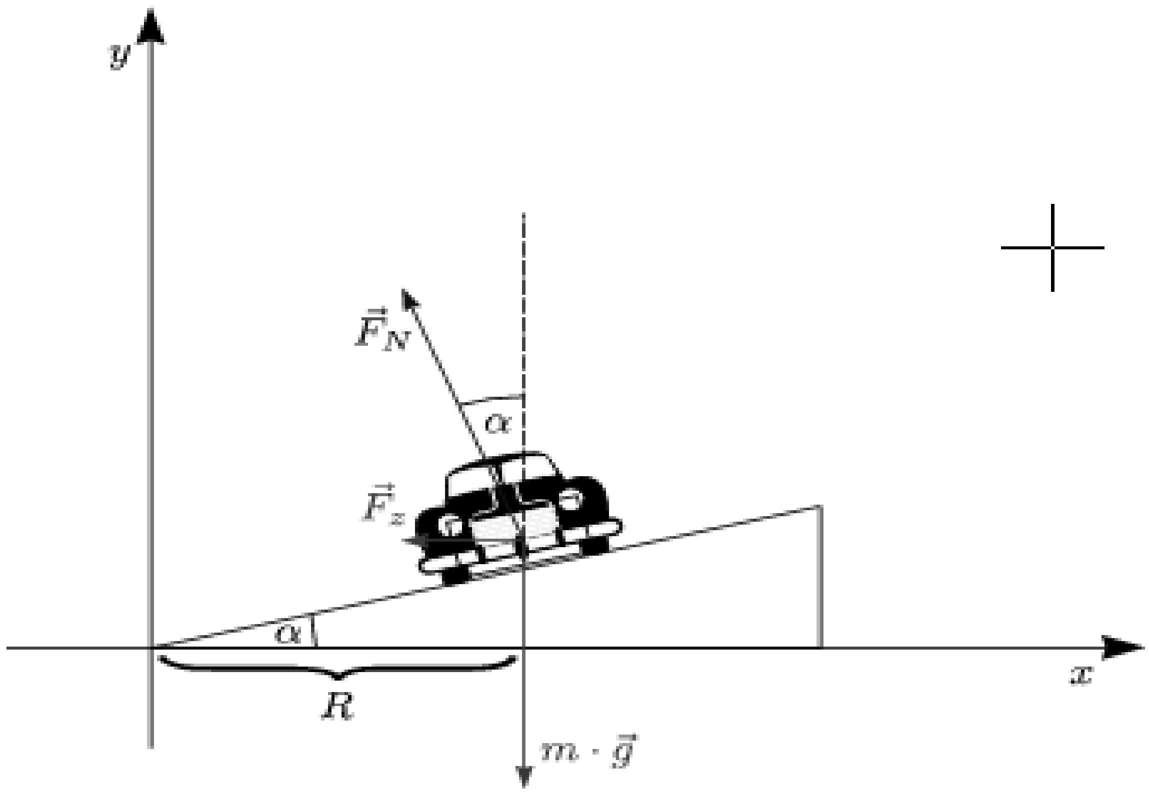
$$a_r = g = r\omega^2 = r\frac{4\pi^2}{T^2}$$

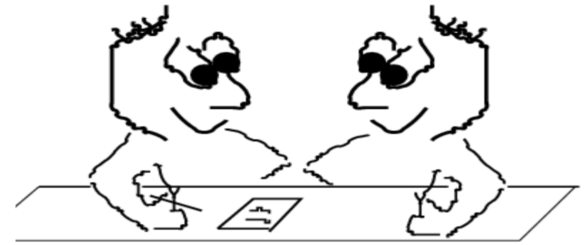
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 1,4\,\mathrm{h}$$

Dies entspricht der Umlaufzeit eines Satelliten im erdnahen Orbit.

Beispiele für Zentrifugalkraft

$$v = 200\,\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}},\ R = 1\,\mathrm{km},\ \alpha = ?$$





Frage: wie groß muss Winkel α sein, damit Auto auch bei Glatteis nicht aus der Kurve fliegt bei 200 km/h?

Beispiele für Zentrifugalkraft

Antwort:

$$x\text{-Richtung: } m a_z = -F_N \sin\alpha$$
$$= -mg\tan\alpha$$

Hiermit haben wir folgende Beschleunigung:

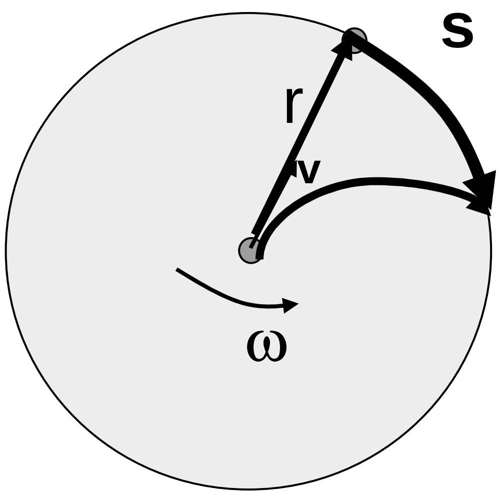
$$a_z = -g\tan\alpha = -\frac{v^2}{R}$$

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{R\cdot g} = \frac{\left(200\cdot\frac{10^3}{3600}\right)^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{1000\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}315$$

Damit ergibt sich folgender Winkel:

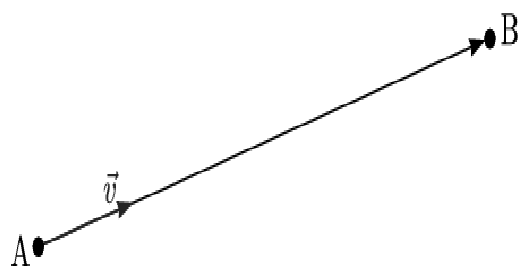
$$\boxed{\alpha = 17{,}5^\circ}$$

Corioliskraft ist eine zweite Scheinkraft, die auftritt wenn Körper sich im rotierenden Bezugssystem BEWEGT.



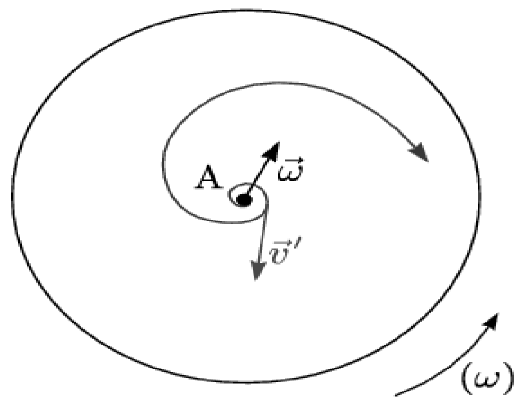
Versuch mit Tennisball
Auf rotierende Scheibe:
Ball erreicht Ziel nicht!
Es wirkt eine zusätzliche
Kraft im rotierenden System
(Scheinkraft!)

i.) Außen:



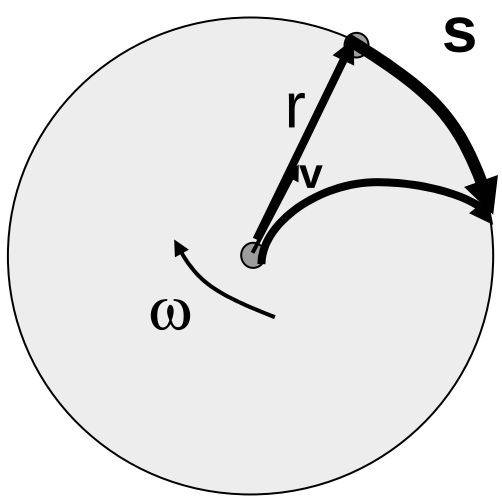
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{o}$$

ii.) Innen:



$$\vec{F}_C = 2m\,(\vec{v}' \times \vec{\omega})$$

Berechnung der Corioliskraft anhand einer rotierenden Scheibe (Versuch!)



$r=vt$
$s=r\omega t=v\omega t^2$
$s=1/2\ a_c t^2$
oder $a_C= 2\ v\omega$

Die Corioliskraft beschreibt die Bewegung eines Körpers in einem rotierenden Bezugssystem.
Die Kraft ist $2mv'\omega$ oder allgemein

$$\mathbf{F}_c=2m(\mathbf{v}'\times\omega).$$

v‘ ist die Geschwindigkeit,
die ein Beobachter im rotierenden System misst, wenn er die Rotation seines Systems nicht berücksichtigt.
v=Geschwindigkeit im Laborsystem.
Beachte: Corioliskraft abhängig von v UND ω, weil Zentrifugalkraft nur abhängig von ω

Versuch: Corioliskraft

Kurzbeschreibung:

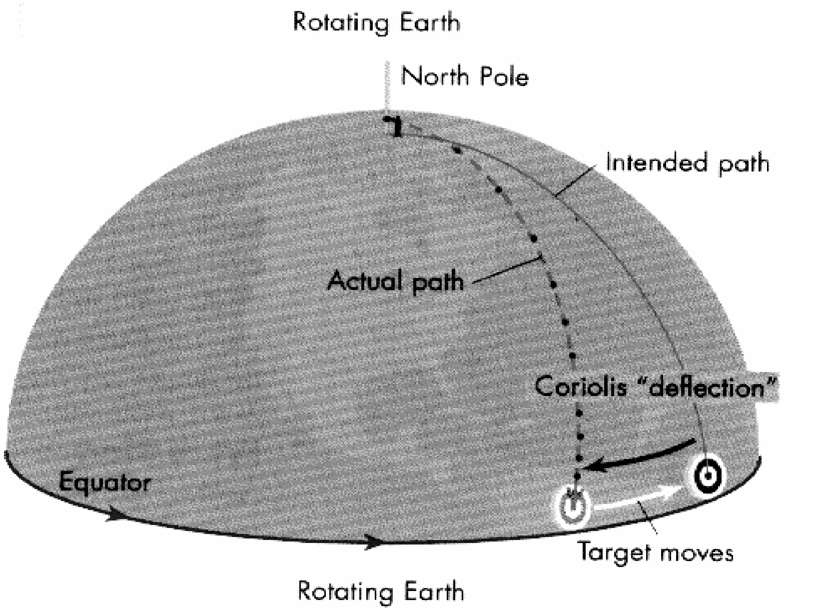
Es wird demonstriert, dass in einem sich drehenden Bezugssystem Scheinkräfte (hier die Corioliskraft) auftreten, während im ruhenden Bezugssystem nichts passiert.

Durchführung:

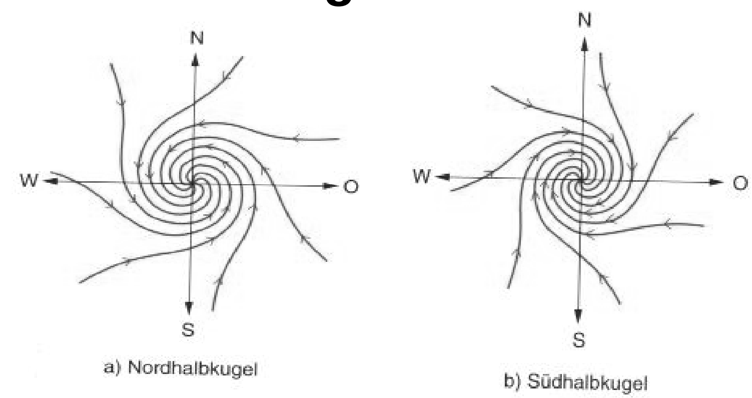
Ein Drehtisch, der über einen Motor in Rotation versetzt wird, bildet das bewegte Bezugssystem. An einem am Tisch befestigten Stativ ist ein Fadenpendel aufgehängt. Während der Tisch ruht, wird das Pendel angestoßen. Anschließend wird der Tisch in Bewegung versetzt. Für einen am Drehtisch sitzenden (d.h. mitbewegten) Beobachter scheinen auf das Pendel Kräfte (hier die Corioliskraft) zu wirken, da sich die Richtung der Schwingung relativ zur Aufhängung bzw. relativ zum Beobachter verändert. Diese Bewegung kann durch eine Tintenspur nachgewiesen werden. Ein ruhender Beobachter sieht jedoch, dass sich die Richtung der Schwingung relativ zu seinem Bezugssystem nicht ändert.

Der Versuch kann mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten durchgeführt werden.

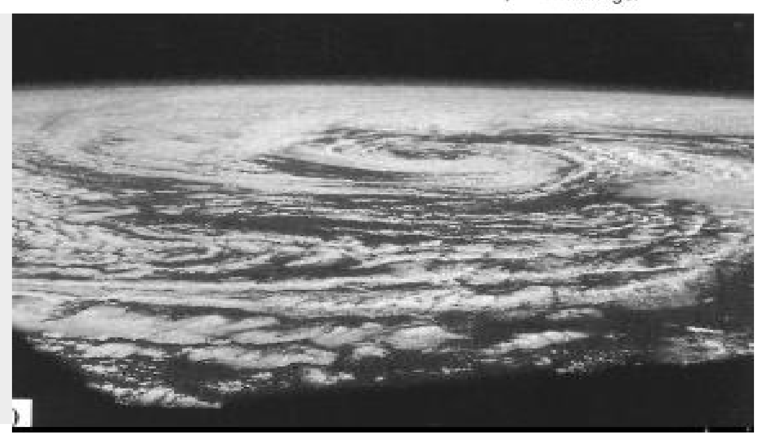
Beispiel für Corioliskraft



Corioliskraft gilt auch für Wind: dieser erfährt Abweichung nach rechts auf der Nordhalbkugel und nach links auf der Südhalbkugel. Luchtdrucktief erzeugt Wirbelsturm!



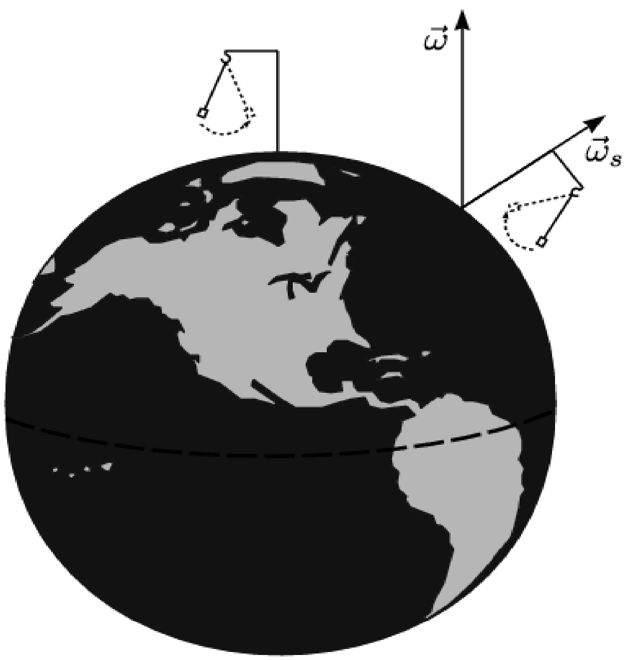
Kanonenkugel vom NP abgeschossen in Richtung Ziel am Äquator kommt rechts vom Ziel an, weil das Ziel sich bewegt hat. Auf dem südlichen Halbkugel kommt die Kugel links vom Ziel an, d.h. die Scheinkraft verursacht Abweichung nach rechts auf nordl. Halbkugel und nach links auf dem südlichen Halbkugel.



Versuch: Foucaultsches Pendel

Kurzbeschreibung:

Die Corioliskraft, die im Versuch "Zentrifugalkraft im bewegten Bezugssystem: Drehtisch", Seite 1–81 qualitativ und im kleinen Maßstab demonstriert wurde, wird in diesem Versuch zur Bestimmung der geographischen Breite von Karlsruhe ausgenutzt, indem die Drehung der Schwingungsebene eines Fadenpendels gemessen wird.



Durchführung:

Das Pendel wird ausgelenkt und möglichst vorsichtig freigegeben. Während der Schwingung sind Erschütterungen im Hörsaal möglichst zu vermeiden. Die Dauer von 10–15 Schwingungsperioden wird mit der Stoppuhr bestimmt. Gleichzeitig wird auf der Skala gemessen, wie viel sich die Projektion der Pendelaufhängung weiterbewegt hat. Schließlich muß die Amplitude der Schwingung gemessen werden.

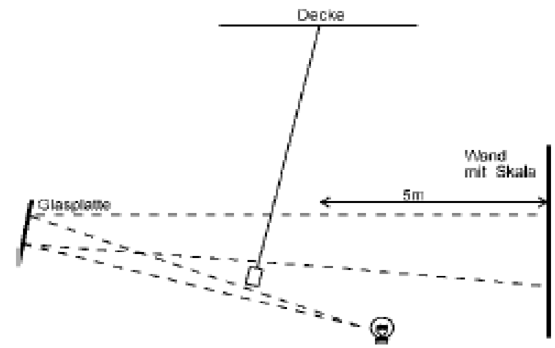
$$\omega_s = \omega \cdot \sin\theta$$

In Karlsruhe: ≈ 28 h

Auswertung: Foucaultsches Pendel

Auswertung:

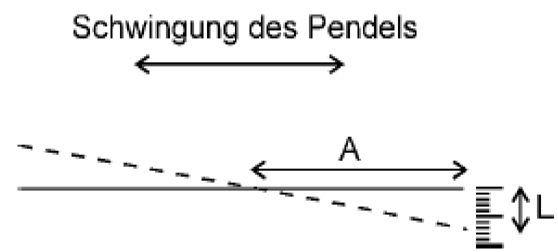
Die Messungen ergeben für 12 Schwingungsperioden (vgl. Skizze):



$$\begin{aligned} 12T &= 56.4\,\mathrm{s} \quad (\Rightarrow T = 4.7\,\mathrm{s}) \\ L &= \frac{1}{50} \cdot 8\,\mathrm{cm} \\ A &= 50\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

In 56.4 s hat sich die Schwingungsebene um $\arctan\left(\frac{L}{A}\right) = 0.183^\circ$ gedreht, was einer Drehung pro Tag um 280.9° entspricht.

Allgemein gilt für die Corioliskraft:



$$\vec{F}_C = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \Rightarrow \quad F \propto \sin\varepsilon,$$

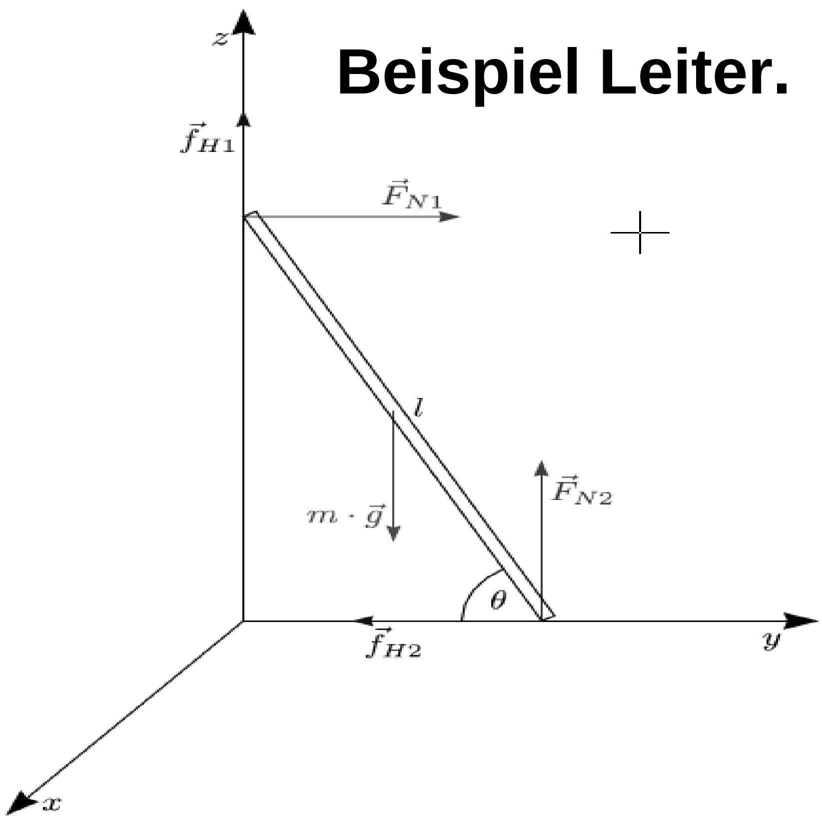
wenn die Rotationsachse und die Richtung der Translationsbewegung den Winkel ε einschließen. Folglich wird an einem Ort der geographischen Breite ε die Schwingungsebene nicht um 360° gedreht, was der Situation am Nordpol ($\varepsilon = 90^\circ$, $\sin\varepsilon = 1$) entspricht, sondern um $360^\circ \cdot \sin\varepsilon$. Für Karlsruhe ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin\varepsilon &= \frac{280.9^\circ}{360^\circ} = 0.78 \\ \Rightarrow \quad \varepsilon &= 51.3^\circ. \end{aligned}$$

Mechanische Stabilität

Starrer Körper ist stabil, wenn alle Beschleunigungen null sind, d.h. $a_{cm}=0$ und $\alpha = 0$ gegenüber jede Rotationsachse.

Beispiel Leiter.



Bis zu welchem Winkel θ_{min} ist die Leiter stabil?
Wir betrachten hierzu die Kräfte:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{f}_{H1} + \vec{f}_{H2} = 0$$

Wir zerlegen in Komponenten:

- x-Richtung:

$$-f_{H2} + F_{N1} = 0$$

- y-Richtung:

$$F_{N2} - mg + f_{H1} = 0$$

Drehmomente um einen beliebigen Punkt sollten null sein.
Betrachte Berührungspunkt Leiter-Boden:

$$\vec{l} \times \vec{f}_{H1} + l \times \vec{F}_{N1} + \frac{\vec{l}}{2} \times m\vec{g} = 0$$

Oder in Komponenten:

$$-l\cos\theta \cdot f_{H1} - l\sin\theta \cdot F_{N1} + \frac{l}{2} \cdot \cos\theta mg = 0$$

Weiter gilt:

$$f_{H1} = F_{N1} \cdot \mu_H$$

$$f_{H2} = F_{N2} \cdot \mu_H$$

Einsetzen ergibt, dass die Leiter stabil steht bis zum Winkel θ_{min}:

$$\Rightarrow \tan\theta_{min} = \frac{1-\mu_H^2}{2\mu_H}$$

Beispiel: Holz auf Holz

$$\mu_H = 0,24 :\Rightarrow \theta_{min} = 64^\circ$$

Zum Mitnehmen

Scheinkräfte müssen zur Beschreibung der Bewegungen in einem beschleunigt bewegten (z.B. rotierenden) Bezugssystem herangezogen werden.

Diese Scheinkräfte spiegeln nur die Beschleunigung des Bezugssystems wider und sind daher keine auf Wechselwirkungen beruhenden Kräfte.

Für ein Bezugssystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gibt es zwei Scheinkräfte:

$\mathbf{F}_{ZF}=m\omega x(\mathbf{r}x\omega)$ und $\mathbf{F}_C=2m\mathbf{v}x\omega$

Zentrifugal - und Corioliskraft