



Definition: Ein Kreisel ist ein starrer Körper, dessen Bewegung durch einen Fixpunkt festgelegt ist.

Im Folgenden wird die Theorie des rotierenden starren Körpers (*Kreisel*) zusammengefasst, wie sie für das Verständnis der durchzuführenden Versuche benötigt wird. Das Experiment ist zweimal aufgebaut mit leicht unterschiedlichen Apparaturen (*Kreisel*). Das Kreiselmodell wird vorgestellt und zu beiden Versuchsaufbauten werden Hinweise zur Durchführung gegeben.

1 Theoretischer Teil

Wiederholen Sie die für die Kreiseltheorie wichtigen Grundlagen, wie Winkelgeschwindigkeit, Trägheitsmoment, Drehmoment (Erhaltungssatz) und Rotationsenergie.

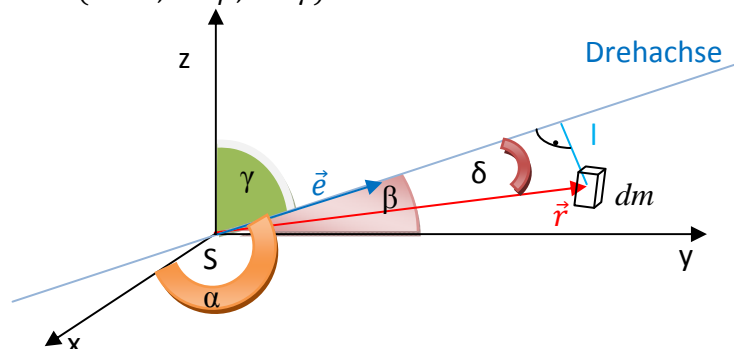
In der Praxis der rotierenden Körper werden oft die Drehachsen durch den Schwerpunkt S des Körpers gelegt, was auch im Folgenden stets getan wird.

1.1 Das Trägheitsellipsoid

In den Schwerpunkt S wird ein beliebiges körperfestes Koordinatensystem gelegt. Es sollen die Trägheitsmomente Θ des Körpers bezüglich aller Achsen durch S bestimmt werden. Dazu werden die Winkel α , β und γ eingeführt, die eine beliebige Drehachse durch S mit den Koordinatenachsen einschließt. Der Einheitsvektor \vec{e} in Richtung dieser Drehachse hat dann die Komponenten:

$$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Das **Trägheitsmoment** Θ ergibt sich damit zu:



$$\begin{aligned} \Theta &= \int l^2 dm \\ &= \int (r \cdot \sin \delta)^2 dm \\ &= \int (r \cdot \vec{e} \cdot \sin \delta)^2 dm \\ &= \int |\vec{r} \times \vec{e}|^2 dm \\ &= \int ((y \cos \gamma - z \cos \beta)^2 + (z \cos \alpha - x \cos \gamma)^2 + (x \cos \beta - y \cos \alpha)^2) dm \\ &= \int (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha dm + \int (x^2 + z^2) \cos^2 \beta dm + \int (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma dm \\ &\quad - 2 \cdot (\int x y \cos \alpha \cos \beta dm + \int y z \cos \beta \cos \gamma dm + \int x z \cos \alpha \cos \gamma dm) \end{aligned} \quad (1)$$

Die ersten drei Summanden enthalten die Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen, sie sollen mit A' , B' und C' bezeichnet werden. Die letzten drei Summanden enthalten die Deviationsmomente, mit D' , E' und F' bezeichnet. Die Deviationsmomente sind ein Maß für die Unwucht und berücksichtigen unsymmetrische Massenverteilungen bezüglich der Koordinatenachsen.

Mit dieser Beziehungen wird aus (1):

$$\Theta = A' \cos^2 \alpha + B' \cos^2 \beta + C' \cos^2 \gamma - 2 \cdot (D' \cos \alpha \cos \beta + E' \cos \beta \cos \gamma + F' \cos \alpha \cos \gamma) \quad (2)$$

Es wird jetzt die Größe **Trägheitsmodul** $\rho^2 = m/\Theta$ mit der Einheit $[\rho] = m^{-1}$ eingeführt. (m ist dabei die Gesamtmasse des rotierenden Körpers.)

Auf allen Drehachsen durch S werden vom Punkt S aus Strecken der Länge ρ abgetragen (obwohl ρ die Dimension einer reziproken Länge hat). Für jede Drehachse ergibt sich i.A. ein anderer Wert Θ und somit

auch ein anderes ρ . Die Endpunkte P dieser Strecken bilden eine Fläche, deren Gleichung nun bestimmt wird. Der Ortsvektor \vec{p} zum Punkt P lautet:

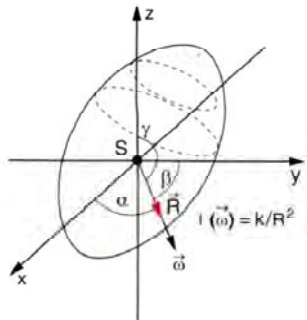
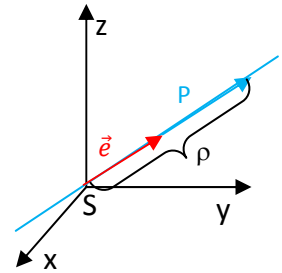
$$\vec{p} = \rho \cdot \vec{e} = (x, y, z)$$

Daraus folgt $x = \rho \cos \alpha$; $y = \rho \cos \beta$ und $z = \rho \cos \gamma$

und somit $\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$; $\cos \beta = \frac{y}{\rho}$ und $\cos \gamma = \frac{z}{\rho}$

Dies eingesetzt in Gleichung (2) ergibt:

$$\Theta = \frac{1}{\rho^2} \cdot (A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 2 \cdot (D'yz + E'zz + F'xz)) \quad (3)$$

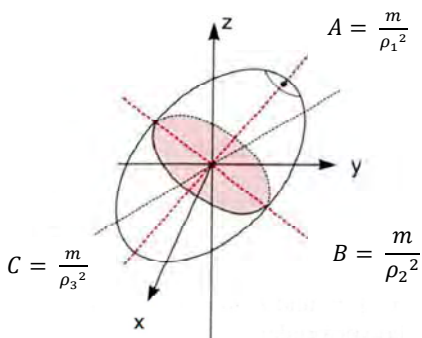


Dies ist die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung. Da die linearen Glieder fehlen, ist der Punkt P' mit dem Ortsvektor $\vec{p}' = -\vec{p}$ ebenfalls ein Flächenpunkt. ρ wird nicht beliebig groß (dies würde einem verschwindenden Trägheitsmoment Θ entsprechen), die Fläche liegt also ganz in Endlichen. Gleichung (3) beschreibt ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt S, es wird **Trägheitsellipsoid** genannt. Die drei Hauptachsen des Ellipsoides werden als **Hauptträgheitsachsen** (oder **Hauptachsen**) des Körpers bezeichnet, die Trägheitsmomente bezüglich dieser Achsen als Hauptträgheitsmomente (1.Hauptachse: Hauptträgheitsmoment A usw.)

Die Gleichung (3) des Trägheitsellipsoides wird besonders einfach, wenn die Hauptachsen als Koordinatenachsen gewählt werden (*Normalform*). Mittels Hauptachsentransformation (vgl. analytische Geometrie) und mit $A = \frac{m}{\rho_1^2}$; $B = \frac{m}{\rho_2^2}$ und $C = \frac{m}{\rho_3^2}$ geht sie über in:

$$\left(\frac{x}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho_3}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

In der Normalgestalt verschwinden die Deviationsmomente. Das Trägheitsmoment Θ bezüglich einer beliebigen Achse durch S ergibt sich zu (dazu \vec{p} in (4) einsetzen):



$$\Theta = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma \quad (5)$$

Zu der großen Halbachse des Trägheitsellipsoides gehört das kleinste Hauptträgheitsmoment zur kleinen Halbachse gehört das größte Hauptträgheitsmoment.

Quelle:[2]

1.2 Klassifikationen des Kreisels

Sind die drei Hauptträgheitsmomente verschieden groß, so heißt der Kreisel unsymmetrisch. Ist beispielsweise $A > B > C$, so wird der Kreisel bezüglich der 1. Hauptachse **kurzachsrig**, bezüglich der 2. Hauptachse **mittelachsrig** und bezüglich der 3. Hauptachse **langachsrig**.

Kreiseltypen-Übersicht

Kugel, Würfel
Tetraeder, axialsymmetrisch, spindelförmig
Tetraeder; axialsymmetrisch, tellerförmig
Körper niedrigerer Symmetrie

Hauptträgheitsmomente

$A = B = C$
 $A = B > C$
 $A = B < C$
 $A > B > C$

Trägheitsellipsoid (Form)

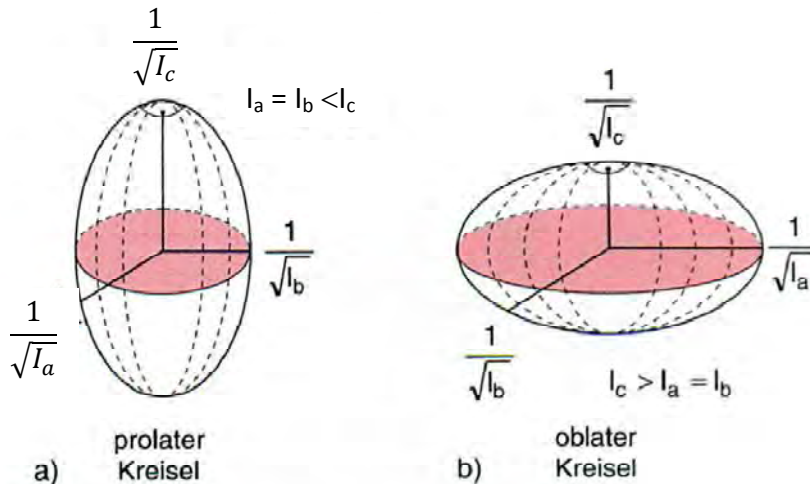
Kugel
Rotationsellipsoid, verlängert
Rotationsellipsoid, abgeplattet
allgemeines Ellipsoid

Als wichtiger Spezialfall werden im Folgenden diejenigen Kreisel betrachtet, bei denen zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind (z.B.: $A = B$). Die Ebenen, die von der 1. und der 2. Hauptachse aufgespannt wird, heißt Äquatorebene. Bezüglich aller Achsen in der Äquatorebene ist das Trägheitsmoment nach (5) gleich A (*äquatoriales Trägheitsmoment*). das Trägheitsellipsoid ist rotationssymmetrisch bezüglich der dritten Hauptachse, die *Figurenachse* genannt wird. Der Kreisel heißt **symmetrisch**¹.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

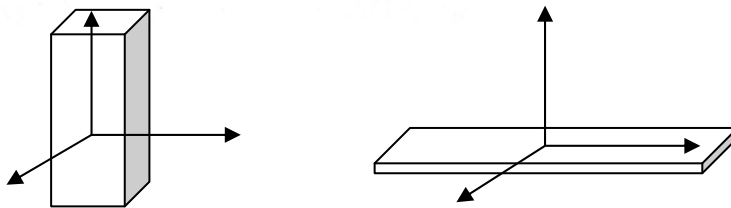
$A=B>C$; verlängertes Trägheitsellipsoid

$A=B<C$; abgeplattetes Trägheitsellipsoid



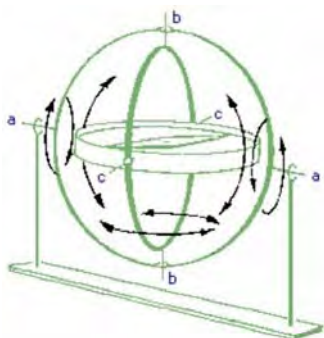
Quelle: [2]

Abb. 5.27a,b. Trägheitsellipsoide des (a) prolaten und (b) oblaten symmetrischen Kreisels



Ein weiterer Spezialfall ergibt sich bei $A = B = C$. Das Trägheitsellipsoid wird zur Kugel, der Kreisel heißt kugelsymmetrisch². Die Trägheitsmomente bezüglich aller Achsen durch S sind nach Gleichung (5) gleich A .

1.3 Beschreibung des verwendeten Kreiselmodells (Kardankreisel):



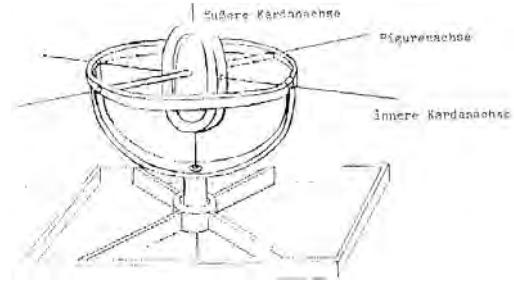
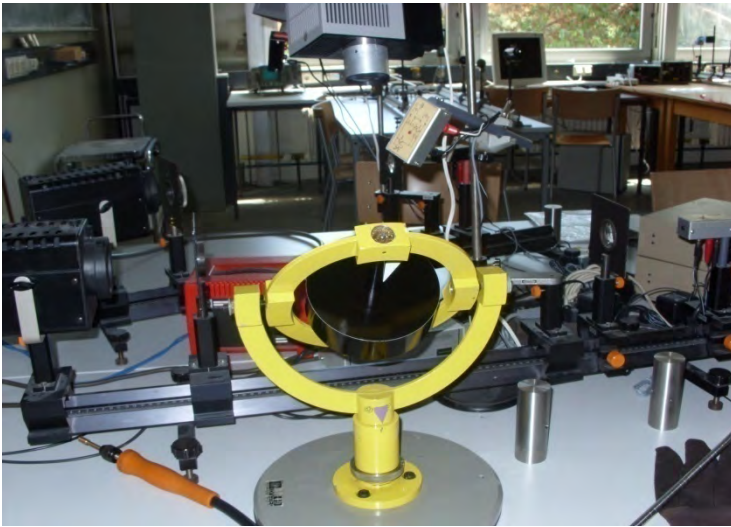
Sie führen die Versuche mit einem Kardankreisel durch. Die eigentliche Kreisscheibe dreht sich um die Figurenachse, die im inneren Kardanrahmen gelagert ist. Dieser Rahmen ist mit der inneren Kardanachse, die senkrecht auf der Figurenachse steht, im äußeren Kardanrahmen gelagert. Der äußere Kardanrahmen ist mit der äußeren Kardanachse, die auf den beiden anderen Achsen senkrecht steht, in der Bodenplatte gelagert. Diese drei Achsen schneiden sich im Schwerpunkt S.

Durch das Aufstecken von Zusatzgewichten auf die Lager der Figurenachse lässt sich im symmetrischen Fall der abgeplattete, kugelsymmetrische und verlängerte Kreisel darstellen, im unsymmetrischen Fall der kurz-

¹ Achtung! Der Körper selbst muss nicht rotationssymmetrisch (auf einer Drehbank hergestellt) sein. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat ein rotationssymmetrisches Trägheitsellipsoid.

² Achtung! Der Körper muss nicht kugelförmig sein. Ein Würfel ist in diesem Sinne kugelsymmetrisch.

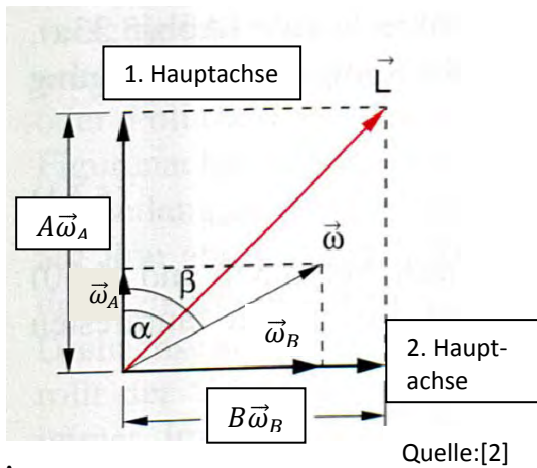
, mittel- und langachsige Kreisel, jeweils auf die Figurenachse bezogen. Für den Kreisel sind diverse Zusatzteile vorhanden.



Das Trägheitsmoment des äußeren Kardanrahmens bezüglich der Senkrechten lässt sich durch das Aufschrauben zylindrischer Zusatzgewichte auf die innere Kardanaxse um ein bekanntes Maß erhöhen. Beide Kardanrahmen sind für Transport- oder andere Zwecke arretierbar, der innere Kardanrahmen allerdings nur in der Horizontalen.

1.4 Freie Achsen

Im Allgemeinen fallen beim Kreisel Drehimpuls- und Drehachse nicht zusammen. (Drehimpuls = Richtung des Drehimpulsvektors \vec{L} und Drehachse = Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\vec{\omega}$). Sei $A > B$ der Drehimpuls ergibt sich aus dem – in Richtung der Hauptachsen gelegten – Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ und den Hauptträgheitsmomenten.



$$\vec{L} = \vec{L}_A + \vec{L}_B + \vec{L}_C = A \vec{\omega}_A + B \vec{\omega}_B + C \vec{\omega}_C \quad (6)$$

Die Drehachse und die Drehimpulsachse fallen also genau dann zusammen, wenn die Rotation um eine Hauptachse erfolgt. Ansonsten umlaufen Drehachse und Figurenachse die Drehimpulsachse. Dies wird in Abschnitt 1.6 noch näher beschrieben werden. Der Körper führt dann eine Taumelbewegung durch, die Nutation genannt wird. Rotiert der Körper um eine Achse (die nicht die Hauptachse ist), die in Lagern festgehalten wird, so verhindern diese die Taumelbewegung. Bei hohen Drehfrequenzen können dadurch in den Lagern enorme Kräfte auftreten, was zu schnellem Verschleiß führt.

In der Praxis werden Drehachsen angestrebt, bei denen diese Lagerbeanspruchung möglichst gering ist, was verschwindender Taumelbewegung entspricht. Die gesuchten Achsen sind die Hauptachsen des Körpers, die Rotation heißt dann stabil. Bei geringstem Abweichen von diesen Drehachsen, die trotz noch so guten „Auswuchtens“ stets vorhanden sind, erweist sich die Hauptachse mittleren Trägheitsmomentes als instabil, der Körper torkelt. Die beiden anderen Hauptachsen sind stabile Drehachsen, sie werden als **freie Achsen** bezeichnet.

Zur Veranschaulichung wird eine Zigarrenkiste an die Achse eines Motors gehängt. Als Aufhängepunkte dienen Ösen in den Mittelpunkten der Seitenflächen. Die Rotationen um die Achsen größten und kleinsten Hauptträgheitsmomentes sind stabil, der Körper rotiert ohne Taumelbewegung. Des trifft für die Rotation um die Achse mittleren Trägheitsmomentes nicht zu. Bei Rotation um die Achse kleinsten Hauptträgheitsmomentes kann die Kiste durch eine Störung (die nicht beliebig klein sein darf) zum Umkippen gebracht werden, so dass sie anschließend um die Achse größten Hauptträgheitsmomentes rotiert. Ganz allgemein ist der Körper bestrebt, um die Achse größten Hauptträgheitsmomentes zu rotieren.

1.5 Das Energieellipsoid

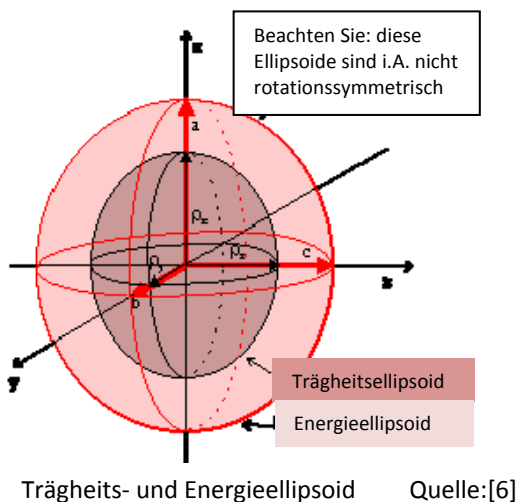
Die Rotationsenergie eines rotierenden Körpers ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 E_{rot} &= \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 \\
 \text{Gl. 5} \rightarrow &= \frac{1}{2} \omega^2 (A \cdot \cos^2 \alpha + B \cdot \cos^2 \beta + C \cdot \cos^2 \gamma) \\
 \text{Gl. 6} \rightarrow &= \frac{1}{2} \cdot \omega^2 (A \cdot \omega_A^2 + B \cdot \omega_B^2 + C \cdot \omega_C^2) = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} L_A^2 + \frac{1}{B} L_B^2 + \frac{1}{C} L_C^2 \right) \tag{7}
 \end{aligned}$$

$\vec{\omega}_A$; $\vec{\omega}_B$ und $\vec{\omega}_C$ sind wieder die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in Richtung der Hauptachsen. Die resultierende Gleichung

$$\frac{A}{2 \cdot E_{rot}} \cdot \omega_A^2 + \frac{B}{2 \cdot E_{rot}} \cdot \omega_B^2 + \frac{C}{2 \cdot E_{rot}} \cdot \omega_C^2 = 1 \tag{8}$$

ist die Normalform des Energieellipsoides, das auch **Poinsot-Ellipsoid** genannt wird.



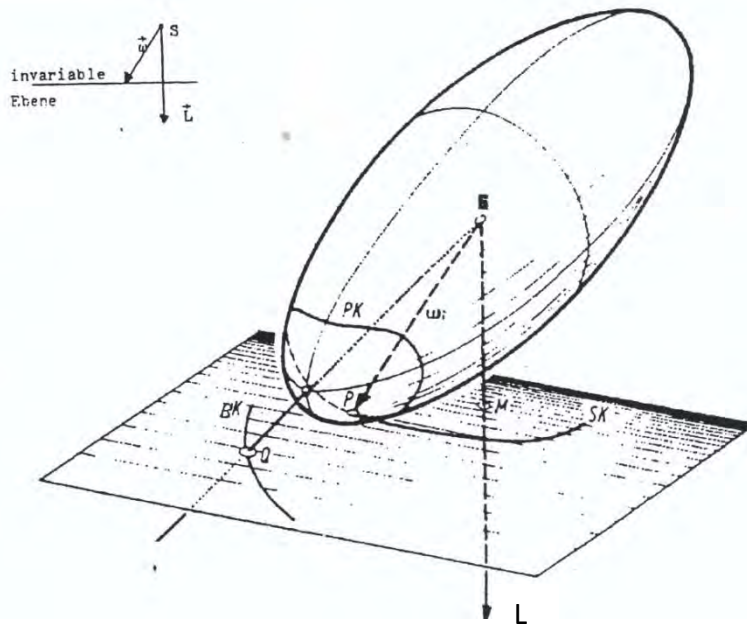
Die Halbachsen sind um den Faktor $\sqrt{2 E_{rot}/m}$ gegenüber den Halbachsen des Trägheitsellipsoides verlängert. Die beiden Ellipsoide sind gleichachsigt ähnlich.

Geometrische Veranschaulichung. Zu einem festen Betrag der Rotationsenergie wird von S aus für alle Achsen durch S der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ abgetragen. Die Endpunkte dieser Vektoren bilden das Ellipsoid.

1.6 Die Nutationen

Die äußeren Kräfte auf den Kreisel sollen sich aufheben (Kreisel im Schwerpunkt unterstützt). Der Kreisel wird dann als **kräftefrei** bezeichnet. Aus $d\vec{L}/dt = \vec{M} = 0$ folgt... $\vec{L} = const.$, d.h. der Drehimpuls behält seine Richtung im Raum und seinen Betrag bei.

Nach Gleichung (7) bleibt dann auch die Rotationsenergie zeitlich konstant. Fällt die Drehachse nicht in eine Hauptachse, laufen die Dreh- und die Figurenachse um die raumfeste Drehimpulsachse herum und beschreiben Figuren, die **Nutationen** genannt werden. In der Praxis ist jedoch nur das Umlaufen der Figurenachse beobachtbar.



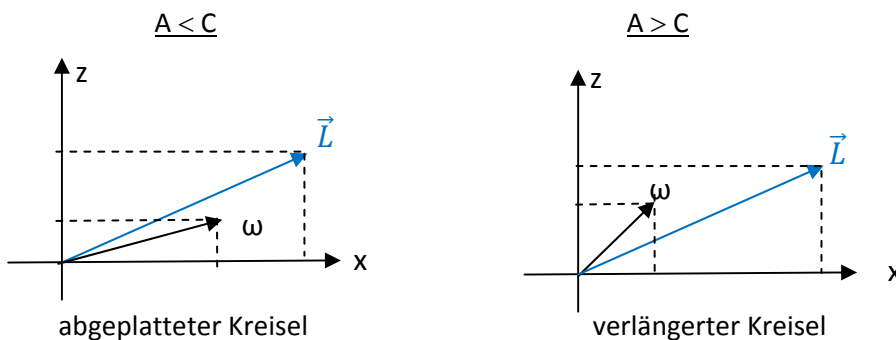
Im Folgenden wird eine geometrische Beschreibung der Nutation vorgestellt, die auf Poincaré zurückgeht.

Wegen $E_{rot} = \vec{L} \cdot \vec{\omega} / 2 = const.$ und $\vec{L} = const.$ bleibt der Endpunkt von $\vec{\omega}$ stets in einer Ebene senkrecht zu Drehimpuls. Sie wird **invariable** Ebene genannt. Da die Spitze von $\vec{\omega}$ auch auf dem Energieellipsoid liegt, berührt diese die invariable Ebene³.

Poincaré beschreibt die Nutationen durch Abrollen des Energieellipsoids auf der invariablen Ebene. Bei diesem Abrollvorgang durchläuft die $\vec{\omega}$ -Achse (Richtung von $\vec{\omega}$) in dieser Ebene die Spurkurve SK, gleichzeitig im Energieellipsoid die Polkurve PK. Die Figurenachse durchläuft die Bahnkurve BK, die in der Praxis beobachtbar ist.

1.6.1 Der symmetrische Kreisel

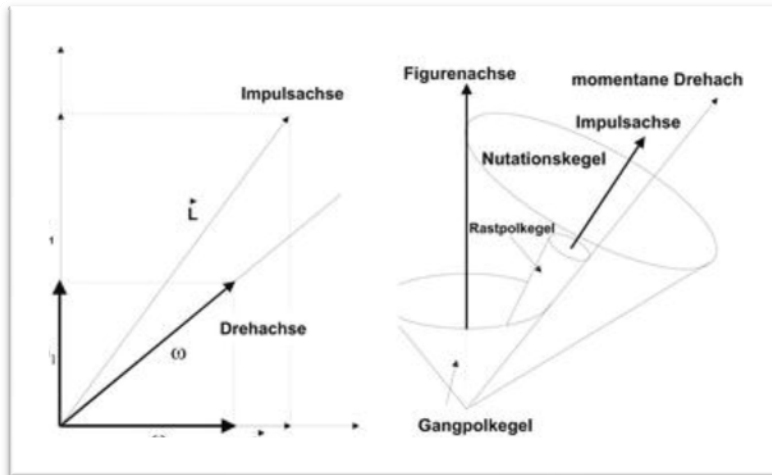
Wie schon in 1.2 betrachtet, seien zwei Hauptträgheitsmomente gleich; hier $A = B$. In diesem speziellen Fall (Trägheitsellipsoid und Energieellipsoid sind rotationssymmetrisch) sind die Spur-, Pol- und Bahnkurven Kreise. Es sind zwei Fälle für den abgeplatteten und den verlängerten Kreisel zu untersuchen. Die Figurenachse (dritte Hauptachse) falle in die z-Achse, damit ergibt sich der Drehimpuls wie folgt:



³ Dass wirklich eine Berührung und nicht etwa ein Schnitt vorliegt, lässt sich mit analytischer Geometrie (Tangentialebenen) beweisen.

Beim Durchlaufen der Spurkurve bildet der Winkelgeschwindigkeitsvektor einen **raumfesten Kreiskegel** (**Rastpolkegel**, die Kegelachse ist dabei die Drehimpulsachse), und beim Durchlaufen der Polkurve einen **körperfesten Kreiskegel** (**Gangpolkegel**, Kegelachse ist jetzt die Figurenachse). Die Figurenachse schließlich durchläuft ebenfalls einen Kreiskegel, den **Nutationskegel** mit der Drehimpulsachse als Kegelachse.

Allgemeiner Fall



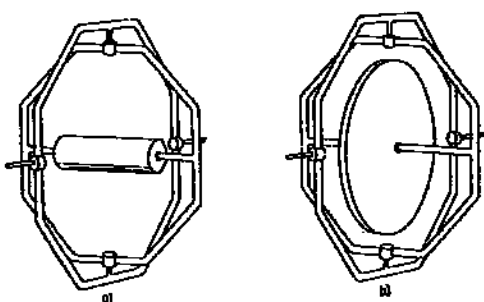
Quelle: [5]



Die Spitzen aller Kegel liegen im Schwerpunkt S.

Die Drehachse ist die Berührungslinie zwischen Gangkegel und Rastpolkegel.

Poinsot beschreibt die Nutation durch das Abrollen des Gangpolkegels auf dem Rastpolkegel. Zur Veranschaulichung dieser Rollbewegung stehen Ihnen Holzmodelle zur Verfügung.

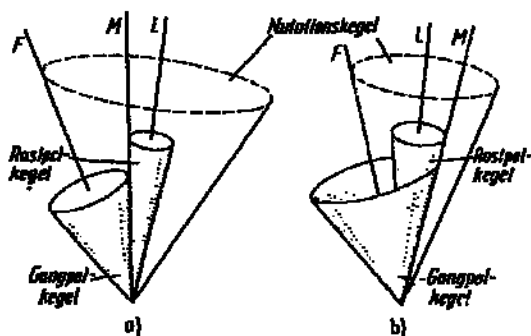


Von einem **verlängertem Kreisel**

(Fall a) spricht man, wenn die geometrische Figurenachse die Hauptträgheitsachse des kleinsten Trägheitsmomentes ist.

Von einem **abgeplatteten Kreisel**

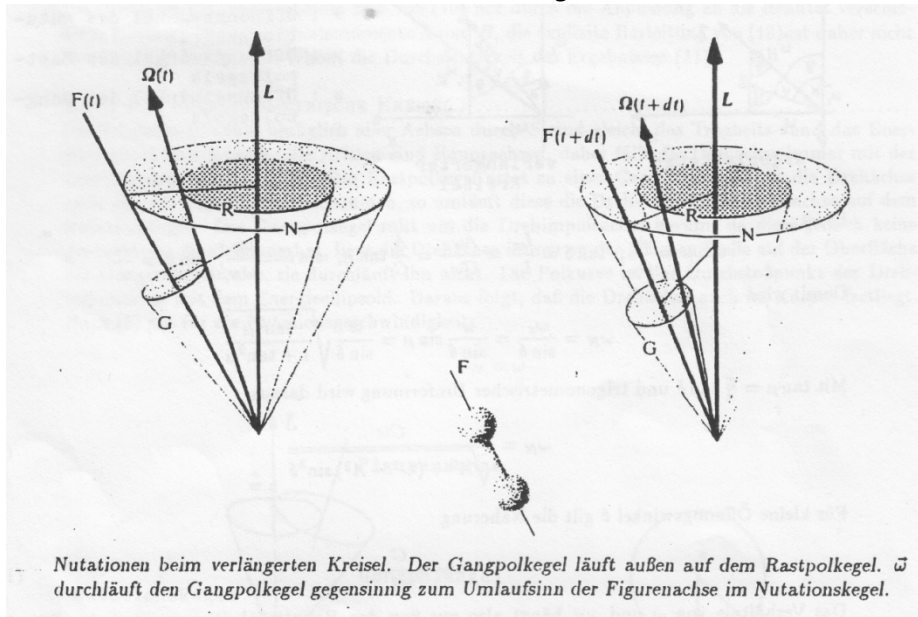
(Fall b) spricht man, wenn die geometrische Figurenachse die Hauptträgheitsachse des größten Trägheitsmomentes ist.



Quelle:[6]

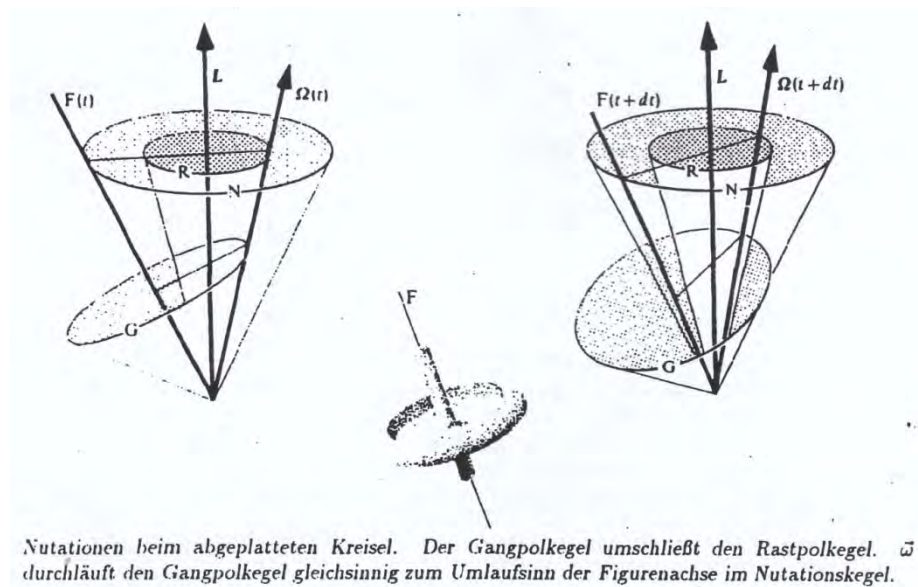
Fall a:

Nutation beim verlängerten Kreisel:

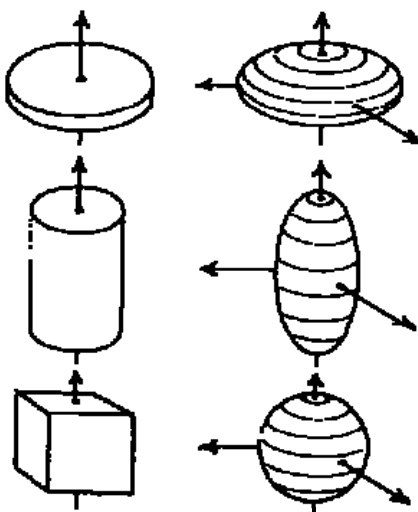


Fall b:

Nutation beim abgeplatteten Kreisel:



Aussehen des Energieellipsoides beim symmetrischen Kreisel:



Energieellipsoid mit Polkurven (Kreise) beim abgeplatteten Kreisel ($A = B < C$)

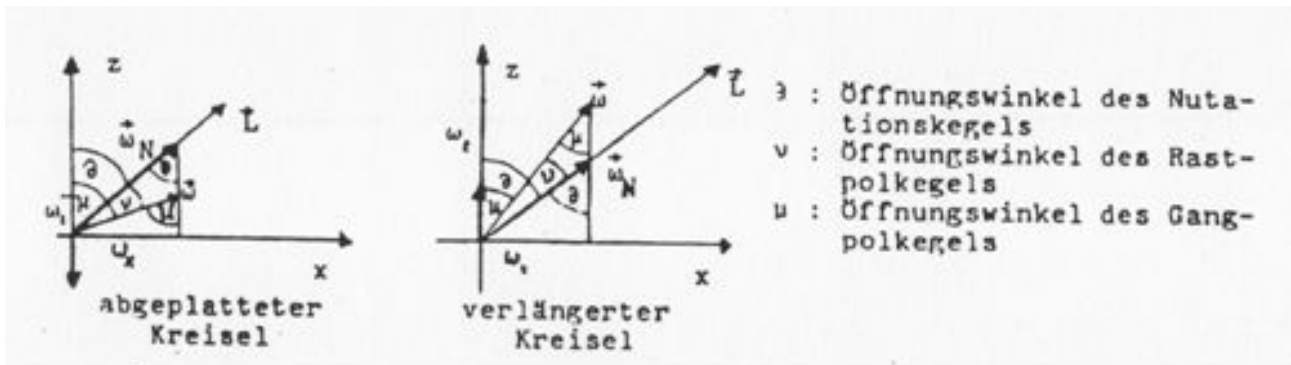
und beim verlängerten Kreisel ($A = B > C$)

sowie beim kugelsymmetrischen Kreisel

$A = B = C$ (siehe auch 1.6.2.)

Quelle:[5]

Werden Öffnungswinkel der Kegel eingeführt und $\vec{\omega}$ in die Richtung des Drehimpulses und in die der Figurenaxe zerlegt, so ergibt sich nach folgenden Betrachtungen für den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und der Nutationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}_N$, mit der die Figurenaxe den Nutationskegel durchläuft:



Es ist $\tan \mu = \frac{\omega_x}{\omega_z}$; $\tan \delta = \frac{L_x}{L_z} = \frac{A \cdot \omega_x}{C \cdot \omega_z} = \frac{A}{C} \cdot \tan \mu$
 und $\sin \mu = \frac{\omega_x}{\omega}$ sowie $\sin \delta = \frac{\omega_x}{\omega_N}$

Damit wird $\omega_N = \frac{\omega_x}{\sin \delta} = \frac{\omega}{\sin \delta} \cdot \sin \mu = \frac{\omega}{\sin \delta} \cdot \sqrt{\frac{\tan^2 \mu}{1 + \tan^2 \mu}}$

Mit $\tan \pi = \frac{C}{A} \cdot \tan \delta$ und trigonometrischer Umformung wird daraus:

$$\omega_N = \frac{C}{\sqrt{A^2 + (C^2 - A^2) \cdot \sin^2 \delta}} \cdot \omega \quad (9)$$

Für kleine Öffnungswinkel gilt die Näherung: $\omega_N = \frac{C}{A} \cdot \omega \quad (10)$

Das Verhältnis von ω und ω_N hängt also nur von den Hauptträgheitsmomenten ab. Für den abgeplatteten Kreisel gilt $\omega_N > \omega$; für den verlängerten Kreisel gilt $\omega_N < \omega$.

Gleichung (10) wurde hergeleitet für den stark idealisierten Fall, dass die Massen und damit die Trägheitsmomente der Kardanrahmen vernachlässigbar sind. Diese Annahme ist für das extrem schwere Versuchsmodell sicher nicht zutreffend. Die Berücksichtigung der Kardanrahmen in der Rechnung ist nicht trivial. Für Interessierte sei angegeben, dass diese Rechnung im Buch von Magnus⁴ durchgeführt wird (S. 176ff.), hier wird ohne Rechnung auf das Ergebnis zurückgegriffen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Erkenntnis, dass der Kreisel sich ungehindert durch die Kardanrahmen nur um die Figurenaxe drehen kann. Bei Drehung um die innere Kardanachse muss das entsprechende Trägheitsmoment des inneren, aber nicht des äußeren Kardanrahmens berücksichtigt werden. Bei Drehung um die Senkrechte werden innerer und äußerer Kardanrahmen mit bewegt, daher tragen beide zum Trägheitsmoment bezüglich der Drehung um die Senkrechte bei. Es ist also A eine Summe von drei und B eine Summe von zwei unabhängigen Trägheitsmomenten.

$$A = A^{\text{Rotor}} + A^{\text{Innenkardan}} + A^{\text{Aussenkardan}}$$

$$B = B^{\text{Rotor}} + B^{\text{Innenkardan}}$$

⁴ Magnus: Kreisel, Theorie und Anwendungen; siehe Literaturverzeichnis Aufgabenblatt

Die Symmetrie des Kreiselkörpers (Rotor) ist natürlich weiterhin gewährleistet, d.h.: $A^{Rotor} = B^{Rotor}$
 Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich, wenn wiederum kleine Öffnungswinkel angenommen werden:

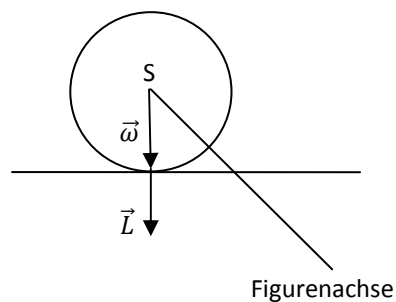
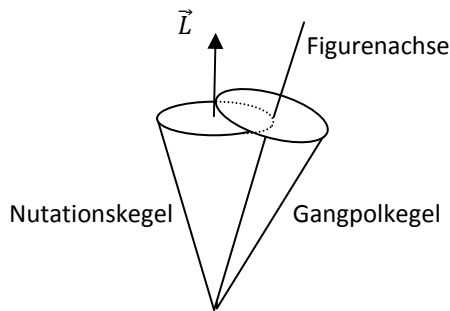
$$\omega_N = \frac{C}{\sqrt{A \cdot B}} \cdot \omega \quad (11)$$

Die Gleichung (11) unterscheiden sich von Gleichung (10) nur durch die Anpassung an die Realität verschiedener (Gesamt-)Hauptträgheitsmomente A und B, die explizite Herleitung von Gleichung (10) ist daher nicht überflüssig geworden und erhöht die Durchsichtigkeit des Ergebnisses (11).

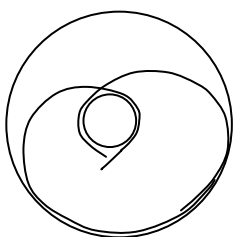
1.6.2 Der kugelsymmetrische Kreisel

Die Trägheitsmomente bezüglich aller Achsen durch S sind gleich, das Trägheits- und das Energieellipsoid sind Kugeln, alle Achsen sind Hauptachsen, daher fällt die Drehachse immer mit der Drehimpulsachse zusammen. Der Rastpolkegel artet zu einer Geraden aus. Fällt die Drehachse nicht mit der Figurenache zusammen, so umläuft diese die Drehachse und die Drehimpulsachse auf dem Nutationskegel. Der Gangpolkegel rollt um die Drehimpulsachse herum, da diese jedoch keine geometrische Ausdehnung hat, liegt die Drehachse immer an der gleichen Stelle der Oberfläche des Gangpolkegels, d.h. sie durchläuft ihn nicht. Die Polkurve ist der Durchstoßpunkt der Drehachse mit dem Energieellipsoid. Daraus folgt, dass die Drehachse auch im Körper festliegt. Nach Gleichung (9) gilt für die Nutationsgeschwindigkeit:

$$\omega_N = \omega$$



1.6.3 Der unsymmetrische Kreisel



Hier sollen die Bahnkurven nur qualitativ beschrieben werden. Es sei $A < B < C$. Ist die Drehachse zur 1. bzw. 3. Hauptachse benachbart (d.h. α bzw. γ klein), so durchläuft die entsprechende Hauptachse Bahnkurven, die zwischen zwei konzentrischen Kreisen liegen, welche abwechselnd berührt werden. Der Abstand dieser beiden Kreise ist von der Unsymmetrie des Körpers abhängig.

Erfolgt dagegen die Rotation um Drehachsen, die zur 2. Hauptachse benachbart sind, so sind die Nutationen instabil, der Kreisel überschlägt sich.

1.7 Der symmetrische Kreisel unter Einfluss äußerer Drehmomente

In Abschnitt 1.6 haben sich die äußeren Kräfte gegenseitig aufgehoben. Jetzt wird der Kreisel unter Einwirkung äußerer Drehmomente, hervorgerufen durch äußere Kräfte (z.B. Schwerkraft), betrachtet. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment:

$$\vec{M} = d\vec{L}/dt$$

Es werden zwei wichtige Sonderfälle betrachtet:

1.7.1 Das Drehmoment ist parallel zum Drehimpuls

Der Drehimpuls ergibt sich zu:

$$\vec{L}_2 = \vec{L}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

Das Drehmoment wirke in der Zeit t_1 bis t_2 und zeige in die Richtung des Drehimpulses. Die Änderung des Drehimpulses zeigt dann ebenfalls in diese Richtung, d.h. der Betrag des Drehimpulses nimmt zu, der Kreisel wird schneller. Dieser Fall stellt das Aufziehen des Kreisels dar.

Zeigt das Drehmoment jedoch in die entgegengesetzte Richtung des Drehimpulses, dann auch die Änderung des Drehimpulses. Der Betrag des Drehimpulses nimmt ab, der Kreisel wird langsamer. Dieser Fall stellt das Abbremsen des Kreisels dar.

1.7.2 Das Drehmoment ist senkrecht zum Drehimpuls

Auf die Figurenachse wird im Abstand \vec{r} vom Schwerpunkt ein Körper mit der Masse m aufgesetzt, die Schwerkraft ruft ein Drehmoment hervor, das senkrecht auf dem Drehimpuls steht, d.h.:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \perp \vec{L}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} L^2 = 0 \Leftrightarrow L^2 = \text{const.} \quad (12)$$

Bei Zugrundelegen eines Koordinatensystems, dessen z-Achse parallel zum Schwerkraftvektor ausgerichtet ist ($\vec{e}_z \parallel \vec{g}$) ergibt sich für das von der Schwerkraft bewirkte Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m \cdot \vec{r} \times \vec{g} = m \cdot g \begin{pmatrix} r_y \\ -r_x \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ also } M_z = 0 \quad (13)$$

Daraus folgt aber, wegen $\vec{M} = d\vec{L}/dt$:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \Leftrightarrow L_z = \text{const.} \quad (14)$$

Bildet man die Differenz von Gl. (12) und Gl. (14) so resultiert:

$$L^2 - L_z^2 = L_x^2 + L_y^2 = \text{const.} \quad (15)$$

Setzt man dazu den Betrag des Drehmomentes $|M|$ als konstant voraus, so folgt:

$$(\dot{L}_x)^2 + (\dot{L}_y)^2 = \text{const.} \quad (16)$$

Durch Differentiation von Gl. (15) nach der Zeit, Auflösen des Ergebnisses nach \dot{L}_z^2 bzw. \dot{L}_y^2 und anschließendes Einsetzen in Gl. (16) erhält man schließlich für das Drehmoment:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \omega_p \cdot \begin{pmatrix} L_y \\ -L_x \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ mit } \omega_p = \text{const. und } [\omega_p] = \frac{1}{s} \quad (17)$$

Die Gleichung (17) beschreibt die Präzession des Drehimpulsvektors um die z-Achse (äußere Kardanachse). Unter dem Einfluss eines Drehmomentes ist der Kreisel bestrebt, den Drehimpulsvektor auf den kürzesten

Weg gleichsinnig parallel zum Drehmomentvektor auszurichten; die resultierende Bewegung des Kreisels ist eine gleichförmige Drehung um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω_p . Die Bestimmung der Präzessionsgeschwindigkeit ω_p erfolgt durch Gleichsetzen der aus den Gleichungen (13) und (17) resultierenden Drehmomentbeträge:

$$r \cdot m \cdot g \cdot \sin \phi = \omega_p \cdot \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \quad (18)$$

Hier ist ϕ der von der Figuren- und der z-Achse aufgespannte Winkel. Für die weitere Rechnung wird angenommen, dass der Präzessionsdrehimpuls klein ist, verglichen mit dem Drehimpuls des Kreisels um die Figurenachse; i.e. $\omega \gg \omega_p$ (schneller Kiesel). Dann können Drehimpulsachse und Figurenachse angenähert als identisch betrachtet werden. Mit dieser Näherung wird:

$$\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = |\vec{L}| \cdot \sin \phi = \omega \cdot C \cdot \sin \phi$$

Mit C wird, wie in den vorangegangenen Abschnitten, das Hauptträgheitsmoment um die Figurenachse bezeichnet. Damit gilt für den Betrag des Drehmomentes:

$$|M| = r \cdot m \cdot g \cdot \sin \phi = \omega_p \cdot |\vec{L}| \cdot \sin \phi \quad (19)$$

Mit obiger Näherung ist ϕ auch der Winkel zwischen $\vec{\omega}_p$ und \vec{L} , so dass aus Gl. (19) folgt:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \quad (20)$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für die Präzessionsgeschwindigkeit bei bekanntem Drehimpuls und bekanntem Drehmoment, z.B. Gl. (13). Umgekehrt übt der Kiesel bei vorhandener, erzwungener Präzessionsgeschwindigkeit auf die Kreisellagerung das entgegengesetzt gleiche Drehmoment aus:

$$\vec{M}' = \vec{L} \times \vec{\omega}_p \quad (21)$$

Aus Gl. (19) folgt nun die gesuchte Präzessionsgeschwindigkeit:

$$\omega_p = \frac{r \cdot m \cdot g}{\omega \cdot C} \quad (22)$$

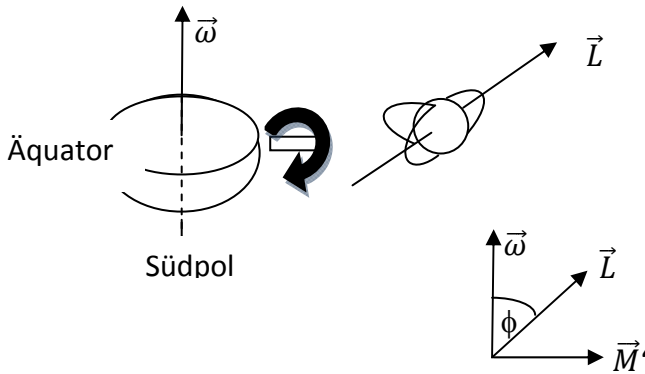
Die zu Gleichung (22) führenden Betrachtungen waren von vereinfachender Art; Fragen der Anfangsbedingungen wurden nicht berührt, das Drehmoment \vec{M} wurde einfach als gegeben vorausgesetzt. Im Allgemeinen wird die äußere Kraft ($\vec{F} = m \vec{g}$) wirken⁵ und das entsprechende Drehmoment wird sich erst anschließend einstellen. Die Anfangsbewegung des schweren Kreisels ist also - der Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ nachgebend - immer ein Fallen. Aber indem er fällt, erfährt der Kiesel eine Präzessionsgeschwindigkeit. Damit beginnt die Figurenachse sich seitlich um die Vertikale zu bewegen, das anfängliche Fallen führt zusätzlich zu der Präzession auf eine - bisher nicht berücksichtigt - periodische Nutation der Figurenachse. Dies führt zu einer zeitabhängigen Präzessionsfrequenz. Die in Gleichung (22) erhaltene ist eine *mittlere* Präzessionsfrequenz. In der Praxis wird die Nutation eines hinreichend schnellen Kreisels durch die Reibung im Lager gedämpft, so dass sie kaum beobachtbar ist. Die Präzession ist so scheinbar regulär, sie trägt daher auch den Namen **Pseudoreguläre Präzession**.

1.8 Der Kieselkompass

Als wichtige Anwendung der Kieselgesetze wird Ihnen der Kieselkompass vorgestellt. Ein Kiesel, bei dem sich die äußeren Kräfte gegenseitig aufheben, behält die Lage seiner Drehimpulsachse bezüglich des Fixsternhimmels dauernd bei. Das Prinzip des Kieselkompasses beruht darauf, dass durch **Fesselung** eines Drehfreiheitsgrades - beim vorliegenden Modell wird der inneres Kardanrahmen inelastisch an die Horizontale gebunden - die Erddrehung als Zwangsdrehung auf den Kiesel einwirkt.

⁵ ... nach Aufsetzen der Masse m auf den Kiesel ($F_G = m g$)

1.8.1 Der Kreiselkompass am Äquator



Die Figurenachse zeigt von West nach Ost, ebenso der Drehimpuls. Dabei übt der Kreisel nach Gleichung (21) auf seine Führung das Kreiselmoment \vec{M}' aus:

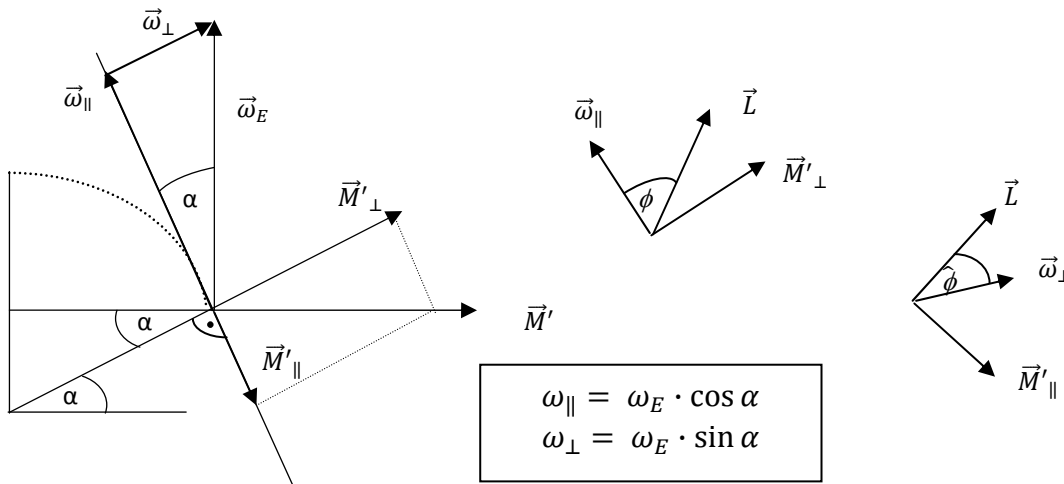
$$\vec{M}' = \vec{L} \times \vec{\omega}_E$$

$$|\vec{M}'| = C \cdot \omega \cdot \omega_E \cdot \sin \phi$$

C ist hier wieder das Trägheitsmoment bezüglich der Figurenachse. \vec{M}' dreht den Kreisel um die äußere Kardanachse in der eingezeichneten Richtung, bis die Figurenachse in der Nord-Süd-Richtung steht. Dann ist $\phi = 0$ und somit auch $|\vec{M}'| = 0$. Auf Grund der Trägheit des Kreisels wird die Figurenachse über diese Stellung hinaus-schwingen und sich unter Einwirkung der Lagerreibung erst allmählich in Nordrichtung einstellen.

1.8.2 Der Kreiselkompass in der geographischen Breite $\alpha \neq 0$

Die Figurenachse und das Drehmoment zeigen wieder von West nach Ost. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_E$ wird in zwei Komponenten zerlegt.



Die erste Komponente $\vec{\omega}_{\parallel}$ liegt in der Horizontalebene, die zweite Komponente $\vec{\omega}_{\perp}$ steht senkrecht darauf. Das Kreiselmoment \vec{M}'_{\perp} das von $\vec{\omega}_{\parallel}$ hervorgerufen wird ist:

$$\vec{M}'_{\perp} = \vec{L} \times \vec{\omega}_{\parallel}$$

$$|\vec{M}'_{\perp}| = C \cdot \omega \cdot \omega_E \cdot \sin \phi \cdot \cos \alpha$$

Auch dieses Drehmoment dreht den Kreisel um die äußere Kardanachse, bis die Figurenachse und damit der Drehimpulsvektor nach Norden zeigt, dann ist $\phi = 0$ und somit auch $|\vec{M}'_{\perp}| = 0$.

Das Kreiselmoment \vec{M}'_{\parallel} , das von $\vec{\omega}_{\perp}$ hervorgerufen wird, ist:

$$\vec{M}'_{\parallel} = \vec{L} \times \vec{\omega}_{\perp}$$

$$|\vec{M}'_{\parallel}| = C \cdot \omega \cdot \omega_E \cdot \sin \hat{\phi} \cdot \sin \alpha$$

Dieses Drehmoment versucht, den Kreisel und die innere Kardanachse zu drehen, so dass die Figurenachse und der Drehimpulsvektor aus der Horizontalebene herausgedreht werden, bis $\phi = 0$ und damit $|\vec{M}'_{\parallel}| = 0$ ist, Beim vorliegenden Kreiselmodell verhindert die inelastische Fesselung eine solche Bewegung. Für den Fall elastischer Fesselung würde sich durch die Fesselung ein \vec{M}'_{\parallel} entgegen- gerichtetes Moment \vec{M}^* aufbauen, die Drehung käme im Falle des Gleichgewichtes $\vec{M}'_{\parallel} = \vec{M}^*$ zum Stillstand, der innere Kardanrahmen wäre um den Elevationswinkel β aus der Horizontalen gedreht.

1.8 1 Der Kreiselkompass am Nordpol

Am Nordpol ergibt sich keine Einstellung der Figurenachse nach Norden, da $\vec{\omega}_E$ in Richtung der äußeren Kardanachse zeigt, um die sich der Kreisel frei drehen kann. Dieser Fall ist gegeben, wenn der Kreisel in diesem Versuch ohne Holzkeil auf den Drehtisch gestellt wird. Der Holzkeil simuliert die geographische Breite $\alpha = 30^\circ$.

Dieses Verhalten des Kreiselkompasses am Nordpol ist sinnvoll, da am Nordpol eine Nord-Süd-Richtung nicht definiert ist.

Verwendete Quellen:

1. Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1, Mechanik, Akustik, Wärme, 12. Auflage 2008
2. Demtröder, Experimentalphysik1, Mechanik und Wärme, 5. Auflage, 2008
3. Falk-Ruppel, Mechanik, Relativität, Gravitation, 1973
4. http://www.woehwa.com/fotos/produkte_kreisel05.jpg, *Entnahmedatum: 22.04.09*
5. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637>, *Entnahmedatum: 26.05.09*
6. http://web.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/lectures/ph1_0102/p112_l03/img167.gif; *Entnahmedatum: 26.05.09*
7. <http://www.paehler.org/tim/archiv/extern/david/htmlexamen/Image25.gif>, *Entnahme: 26.05.09*
8. <http://web.physik.rwth-aachen.de>, *Entnahmedatum: 26.05.09*