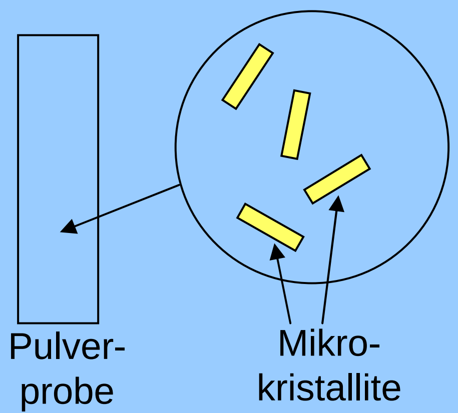
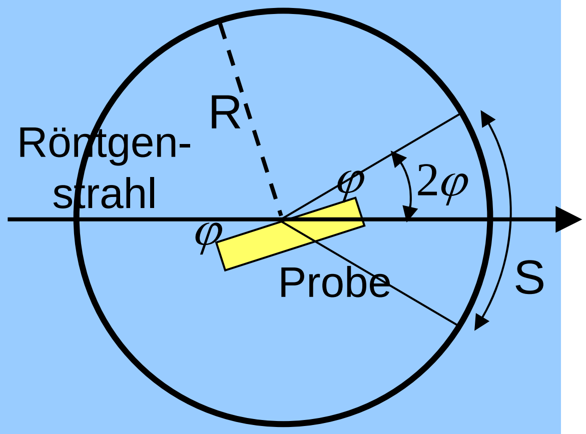
Blatt 11, Aufgabe 1: Debye-Scherrer Verfahren



Beim **Debye-Scherrer Verfahren** wird eine Pulverprobe genommen. Sie enthält viele mikropische kleine Mikrokristallite, die in der Probe zufällig orientiert sind.
Der Vorteil des DS-Verfahrens liegt darin, dass kein großer Einkristall für die Röntgenbeugung benötigt wird, der für manche Stoffe gar nicht, oder nur sehr kostspielig, hergestellt werden kann.

a) Bestimmung des Netzebenenabstandes d



Die Probe befinde sich im Mittelpunkt eines kreisförmig angeordneten Filmstreifens mit Radius R.
Bei gegebener Wellenlänge λ_{Cu} wird Beugung nur an den Mikrokristalliten auftreten, für die der Einfallswinkel φ die Bragg-Bedingung erfüllt:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{m\cdot\lambda}{2d}}$$

Da Einfallswinkel=Ausfallswinkel, ist der Winkel

$\angle$ (einfallender Strahl – gebeugter Strahl) = 2φ

Die Gesamtheit aller Mikrokristallite, die unter φ zum Einfallsstrahl stehen, erzeugen daher einen Beugungkegel mit Öffnungswinkel 4φ

Da die Probe im Mittelpunkt des Filmstreifens steht, gilt ausserdem:

$$4\varphi[^{o}]\frac{2\pi}{360^{o}} = \boxed{4\varphi[rad] = \frac{S}{R}}$$

Blatt 11, Aufgabe 1: Debye-Scherrer Verfahren

$$\lambda_{Cu} = 0.154nm$$
$$R = 57,4mm$$
$$S_1 = 123,6mm$$
$$S_2 = 186,2mm$$

Mit der Bragg-Bedingung ergibt sich für den Abstand der Netzebenen:

$$\boxed{d = \frac{m\cdot\lambda}{2}(\sin\varphi)^{-1} = \frac{m\cdot\lambda}{2}\frac{1}{\sin[\frac{S}{4R}]}}$$

b) **a**us S_1 berechnet sich der zugehörige Netzebenenabstand d_1 zu

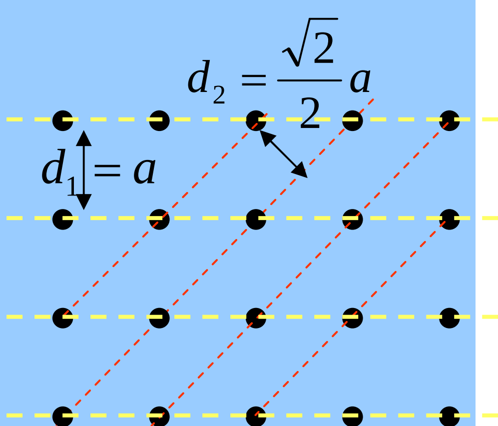
$$\boxed{d_1} = \frac{m\cdot\lambda}{2}\frac{1}{\sin[\frac{S_1}{4R}]} = \frac{0,154nm}{2}\frac{1}{\sin[\frac{123,6mm}{4\cdot 57,4mm}]} = 0,150\,nm = \boxed{1,5\,\text{Å}} \qquad (m=1)$$

Der Beugungsreflex bei S_2 kommt von anderen Netzebenen (Abstand d_2):

$$\boxed{d_2} = \frac{m\cdot\lambda}{2}\frac{1}{\sin[\frac{S_2}{4R}]} = \frac{0,154nm}{2}\frac{1}{\sin[\frac{186,2mm}{4\cdot 57,4mm}]} = 0,106\,nm = \boxed{1,06\,\text{Å}} \qquad (m=1)$$

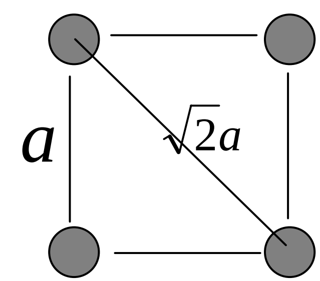
[Man kann durch Einsetzen von d_1 und m=2 in die Bragg-Bedingung zeigen, dass die Netzebenen mit Abstand d_1 keine 2. Beugungsordnung hervorrufen.]

c) **Zuordnung der Beugungsreflexe**



Wenn d_1 der Gitterkonstante a entspricht, so kann d_2 relativ zur Gitterkonstante ausgedrückt werden:

$$\boxed{d_2} = \frac{d_2}{a}a = \frac{d_2}{d_1}a = \frac{1,06}{1,50}a = 0,7066\,a = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$$



Das entspricht gerade der halben Diagonalen, so dass sich die Netzebenen aus nebenstehender Abbildung ergeben.

Blatt 11, Aufgabe 2: Elektrische Leitfähigkeit von Metallen

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \tfrac{1}{mol}$$

$$\rho = 8{,}96 \tfrac{g}{cm^3}$$

$$M = 63{,}5 \tfrac{g}{mol}$$

$$\sigma = 5{,}9 \cdot 10^7 \tfrac{A}{Vm}$$

$$r = 0{,}815 mm$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n_e e A \mathrm{v}_d$$

b) Dichte der Elektronen im Leitungsband

Kupfer ist ein monovalentes Metall, d.h. pro Atom ist ein Elektron im Leitungsband.

$$\boxed{n_e = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{8{,}96 \frac{g}{cm^3} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{Atome}{Mol}}{63{,}5 \frac{g}{Mol}} = 8{,}50 \cdot 10^{22} \frac{Atome}{cm^3}}$$

a) Die Driftgeschwindigkeit beträgt also:

$$\boxed{\mathrm{v}_d = \frac{I}{A n_e e} = \frac{1A}{\pi \left(8{,}15 \cdot 10^{-4} m\right)^2 \cdot 8{,}5 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} C} = 3{,}52 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}}$$

D.h. bei normalen Stromstärken in einem Draht bewegen sich die Elektronen nur äußerst langsam!

Um bei den angegebenen Daten z.B. ein Transatlantikkabel zu durchqueren (ca. 5000km), bräuchte ein einzelnes Elektron etwa 4500 Jahre!

Bei Wechselstrom mit einer Frequenz von 50 Hz und den gegebenen Daten bewegt sich ein einzelnes Elektron maximal um 0,176 mm!

Blatt 11, Aufgabe 2: Elektrische Leitfähigkeit von Metallen

$$F = ma$$

$$E = F / q$$

$$\sigma = 5{,}9 \cdot 10^{7} \, \tfrac{A}{Vm}$$

c) Mittlere Stoßzeit der Elektronen

$$v_d = a\tau = \frac{F}{m_e}\tau = \frac{Ee}{m_e}\tau$$

$$j = \frac{I}{A} = n_e e v_d = \frac{E n_e e^2}{m_e}\tau$$

$$\sigma = \tfrac{j}{E} = \tfrac{n_e e^2 \tau}{m_e}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\sigma m_e}{n_e e^2} = \frac{5{,}9 \cdot 10^{7} \, \tfrac{A}{Vm} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \, kg}{8{,}5 \cdot 10^{28} \, m^{-3} (1{,}6 \cdot 10^{-19} \, C)^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-14} \, s = 25 \, fs}$$

Blatt 11, Aufgabe 2: Elektrische Leitfähigkeit von Metallen

$$E_F = 7eV$$

$$a_{Cu} = 0{,}26nm$$

d) Mittlere freie Weglänge relevanter Elektronen

Für den Leitungsprozess relevante Elektronen haben die Energie

$$E \approx E_{Fermi}$$

Daraus kann man die Fermigeschwindigkeit berechnen:

$$E_F = \tfrac{1}{2} m_e \mathrm{v}_F^2$$

$$\mathrm{v}_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7eV}{9{,}11 \cdot 10^{-31}kg}} = 1{,}6 \cdot 10^6 \,\tfrac{m}{s}$$

Die mittlere freie Weglänge beträgt dann:

$$\boxed{\begin{aligned} l &= \mathrm{v}_F \cdot \tau = 1{,}6 \cdot 10^6 \,\tfrac{m}{s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-14} s = 40nm \\ l &\approx 154 \cdot a_{Cu} \end{aligned}}$$

Blatt 11, Aufgabe 3: Atomkerne und Kernreaktionen

$$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$m_n = 1.6750 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$m_{He} = 6.6442 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$c = 2.998 \cdot 10^{8}\, ms^{-1}$$

$$1eV = 1.602 \cdot 10^{-19}\, J$$

a) Bindungsenergie: ^{4}He

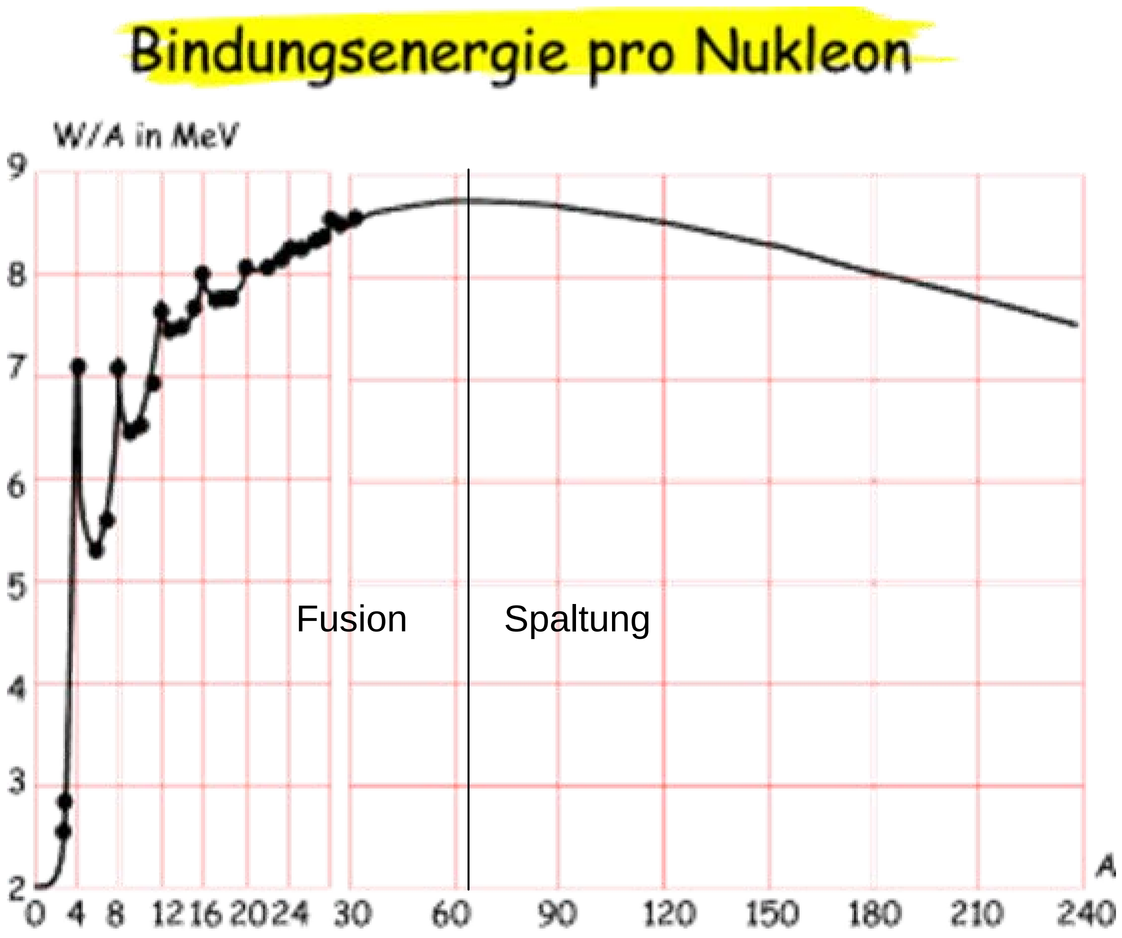
$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{Kern}$$

$$E_B = \Delta m c^2$$

$$E_{B/A} = \frac{2 \cdot m_p + 2 \cdot m_n - m_{Kern}}{4} \cdot c^2 = 7.2 MeV$$

Blatt 11, Aufgabe 3: Atomkerne und Kernreaktionen

b)



Blatt 11, Aufgabe 3: Atomkerne und Kernreaktionen

$t_{1/2} = 5730a$

$m = 200g$

$\frac{^{14}C}{^{12}C} = 1{,}3 \cdot 10^{-12}$

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$

$M_C = 12 \frac{g}{mol}$

Definiton des Mols!

c) Von ursprünglich N Atomen zerfallen innerhalb der Halbwertszeit:

$$\frac{N}{2} = N \cdot e^{-\lambda \cdot t_{1/2}}$$

Die Zerfallskonstante λ ergibt sich damit aus der Halbwertszeit zu:

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -\lambda \cdot t_{1/2} \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \lambda \cdot t_{1/2}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0{,}693}{5730a} = 3{,}84 \cdot 10^{-12} \frac{1}{s}$$

Die Anzahl der radioaktiven ^{14}C-Atome in der ursprünglichen Probe betrug:

$$N_0^{^{14}C} = m \cdot \frac{^{14}C}{^{12}C} \cdot \frac{N_A}{M} = 0{,}2kg \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{Atome}{Mol}}{12 \frac{g}{Mol}}$$

$$= 1{,}3 \cdot 10^{13}\, Atome$$

Die Zerfallsrate in der ursprünglichen Probe war damit:

$$R_0 = \lambda \cdot N_0^{^{14}C} = 3{,}84 \cdot 10^{-12} \frac{1}{s} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{13} \approx 3000 \frac{1}{\min}$$

Blatt 11, Aufgabe 3: Atomkerne und Kernreaktionen

Die ursprüngliche Zerfallsrate ist nach n Halbwertszeiten um $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ geringer geworden, d.h.:

$$R_n = R_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{R_n}{R_0} \quad \Rightarrow \quad 2^n = \frac{R_0}{R_n}$$

$$n \cdot \ln 2 = \ln \frac{R_0}{R_n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln \frac{R_0}{R_n}}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{3000 \frac{1}{\min}}{400 \frac{1}{\min}}}{\ln 2} \approx 2{,}91$$

Das Alter des Knochens beträgt also:

$$\boxed{t = n \cdot t_{1/2} = 2{,}91 \cdot 5730a \approx 16700a}$$

Blatt 11, Aufgabe 4: Wellen

a) **Wellengleichung:** $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v_{ph}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

b) **Ebene Welle:**

$$f(z,t) = Ae^{i(kz-\omega t)}$$

Einsetzen

$$-A\omega^2 e^{i(kz-\omega t)} + \mathrm{v}_{ph}^2 A k^2 e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

$$\left(\mathrm{v}_{ph}^2 k^2 - \omega^2\right) A e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \qquad \mathrm{v}_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

Blatt 11, Aufgabe 4: Wellen

c) Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

$\psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ einsetzen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}Ak^2\sin(kx-\omega t) = i\hbar A\omega\cos(kx-\omega t)$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{k^2}{\omega}\tan(kx-\omega t) = i$$

d) Einsetzen von $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$**:**

$$\frac{\hbar^2}{2m}Ak^2e^{i(kx-\omega t)} = \hbar A\omega e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m} = \hbar\omega$$

$|\psi(x,t)|^2\,dxdt$ ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Interval [t,t+dt] und [x,x+dx] zu finden.

Blatt 11, Aufgabe 5: Teilchen in el. und mag. Feldern

a) Die positiven Kerne werden durch das elektrische Feld nach unten abgelenkt, während sie durch das magnetische Feld eine Karft nach oben erfahren. Damit die Teilchen geradlinig durch den Filter fliegen, müssen sich die beiden Kräfte aufheben:

$$F_{el} = qE \quad = \quad F_{mag} = qvB$$

$$\Rightarrow \quad v = E / B$$

b) Nach der Blende wirkt nur noch das Magnetfeld. Den Radius der Teilchenbahn erhält man durch Gleich-setzen der Zentripetalkraft und der Lorentzkraft:

$$F_Z = m\frac{v^2}{r} \quad = \quad F_{mag} = qvB$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB} = \frac{mE}{qB^2}$$

$$2r_p = 1{,}04m \quad 2r_\alpha = 2{,}09m$$