

Die Entstehung der leichten Elemente

Johannes Zeller
Universität Karlsruhe (TH)

Vortrag am **15.5.2009**

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundideen des Big Bang	3
2.1	Das kosmologische Prinzip	3
2.2	Hubble Expansion	3
2.3	Einsteins Feldgleichungen	4
2.4	Dichteparameter	4
3	Phasen zur Nukleosynthese	5
3.1	Phase I: Gleichgewicht	5
3.2	Phase II: Ausfrieren	5
3.3	Phase III: Neutronenzerfall	6
4	Big Bang Nukleosynthese	6
4.1	Baryonen-Photonen-Verhältnis	7
5	Messung der Elementhäufigkeiten	7
5.1	^4He -Messung	7
5.2	D-Messung	8
5.3	Li-Messung	8
5.4	^3He -Messung	8
5.5	Messergebnisse	9
6	Schlussfolgerung	9
7	Fazit	10

1 Einleitung

Die Entstehung der leichten Elemente wird beschrieben in der Theorie der Big Bang Nukleosynthese. Die Big Bang Theorie wiederum beschreibt die Entstehung und Entwicklung des Universums in welchem wir leben. Sie geht davon aus, dass das Universum aus einer Singularität mit unendlich hoher Dichte und Temperatur entstanden ist. Mit der Zeit hat sich das Universum immer weiter ausgedehnt und sich dadurch auf eine heutige Temperatur von ca. 3 K abgekühlt. In dieser Vorstellung haben sich die leichten Elemente im Zeitraum von 0,01 s bis 3 min nach der Singularität gebildet.

2 Grundideen des Big Bang

Im wesentlichen steht die Vorstellung eines aus dem Big Bang entstandenen und immernoch expandierenden Universums auf drei Grundpfeilern:

- Das kosmologische Prinzip
- Die Hubble Expansion
- Die Einstein'schen Feldgleichungen

2.1 Das kosmologische Prinzip

Das kosmologische Prinzip ist eine Annahme die wir treffen. Man geht davon aus, dass das Universum zum einen **homogen** und zum anderen **isotrop** ist.

Die Homogenität ist in dem Sinne gemeint, dass über hinreichend große Skalen gemittelt wird (einige 100 Mpc). Über so große Bereiche betrachtet sieht das Universum für jeden Beobachter, egal wo er sich befindet gleich aus.

Die Isotropie meint, dass es keine ausgezeichnete Richtung gibt, dass also das Universum egal in welche Richtung man schaut gleich aussieht.

2.2 Hubble Expansion

Die Hubble Expansion ist eine experimentelle Beobachtung die Edwin Hubble 1929 gemacht hat. Er hat beobachtet, dass sich die Galaxien alle von uns fortbewegen und zwar mit einer scheinbaren Fluchtgeschwindigkeit die proportional zum Abstand der Galaxie ist. Dieser Zusammenhang wird in der sog. Hubblebeziehung dargestellt:

$$\vec{v} = H_0 \cdot \vec{r} \quad (1)$$

Die Proportionalitätskonstante H_0 heißt Hubblekonstante. Die Fluchtgeschwindigkeit ist deshalb nur scheinbar, weil die Galaxien nicht eine Bewegung im vorhandenen Raum durchführen, sondern der Raum an sich expandiert.

Um die Expansion mathematisch zu beschreiben geht man zu mitbewegten Koordinaten über, d.h. man lässt das Koordinatensystem konstant und erhält den physikalischen Abstand $\vec{r}(t)$ zweier Objekte indem man den Koordinatenvektor \vec{x} mit einem zeitabhängigen **Skalenfaktor** $a(t)$ multipliziert:

$$\vec{r}(t) = a(t) \cdot \vec{x} \quad (2)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{a}(t) \cdot \vec{x} \quad (3)$$

Vergleicht man Gleichung (3) mit Gleichung (1) so erhält man die **Hubblefunktion**:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (4)$$

Man sieht also, dass die Hubblekonstante keine wirkliche Konstante sondern zeitabhängig ist. H_0 meint immer den aktuellen Wert der Hubblefunktion.

2.3 Einsteins Feldgleichungen

Die Feldgleichungen sind ein Ergebnis der Allgemeinen Relativitätstheorie. Sie beschreiben die Wechselwirkung zwischen Energie bzw. Materie und der vierdimensionalen Raumzeit.

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G \cdot T_{\mu\nu} \quad (5)$$

$G_{\mu\nu}$: Einstein-Tensor (Raumeigenschaften)

$g_{\mu\nu}$: Metrischer Tensor

Λ : Kosmologische Konstante

G : Gravitationskonstante

$T_{\mu\nu}$: Energie-Impuls-Tensor

Die kosmologische Konstante hat Einstein zunächst eingeführt um eine Lösung zu erhalten, die seiner Vorstellung eines statischen Universums entsprach. Danach wurde sie eine Zeit lang verworfen, heute jedoch gewinnt sie wieder an Bedeutung um eine beschleunigte Expansion zu beschreiben.

Eine einfache Lösung dieser Gleichungen, welche die Krümmung der Raumzeit und die Expansion berücksichtigt, ist durch die Robertson-Walker-Metrik gegeben:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2) \right] \quad (6)$$

Der Parameter k gibt das Vorzeichen der Krümmung an, durch den Skalenfaktor $a(t)$ hält die Expansion Einzug, ansonsten hat man die Zeitkomponente und die drei Raumkomponenten in Kugelkoordinaten.

Bei entsprechender Skalierung des Skalenfaktors ergeben sich für k die möglichen Werte $+1, 0, -1$ die jeweils zu unterschiedlich gekrümmten Universen führen:

- $k=+1$: sphärische Krümmung; geschlossenes, endliches Universum
- $k=0$: keine Krümmung; flaches, unendliches Universum
- $k=-1$: hyperbolische Krümmung; offenes, unendliches Universum

Unter Verwendung dieser RW-Metrik reduzieren sich die Feldgleichungen auf die 2 Friedmann-Lemaître-Gleichungen:

$$H^2(t) = \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right]^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3} \quad (7)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\rho(t) + 3\frac{P}{c^2} \right] + \frac{\Lambda}{3} \quad (8)$$

Diese Gleichungen beschreiben nun die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors und damit die Expansion des Universums in Abhängigkeit von der Dichte, der Krümmung, des Druckes und der kosmologischen Konstanten.

Um Lösungen zu finden geht man von thermodynamischen Zustandsgleichungen aus, die einen Zusammenhang zwischen Druck und Dichte für die jeweilige Komponente (Strahlung, Materie, Vakuum) liefern. So erhält man aus der 2. FL-Gleichung die Beziehung zwischen Dichte und Skalenfaktor, was wiederum mit der 1. FL-Gleichung die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors liefert.

2.4 Dichteparameter

Geht man von einem flachen Universum aus und setzt die kosmologische Konstante null so erhält man aus der 1. FL-Gleichung eine kritische Dichte:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (9)$$

Mit dieser kritischen Dichte kann man dann die unterschiedlichen Dichtekomponenten normieren und die 1. FL-Gleichung folgendermaßen umschreiben:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (10)$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (11)$$

Hier wurden formal der kosmologischen Konstanten und der Krümmung ebenfalls Dichteparameter zugeschrieben. Speziell über den Materieanteil Ω_m können durch die BBN Aussagen gemacht werden.

3 Phasen zur Nukleosynthese

Die leichten Elemente (D , ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$) sind in einem Zeitraum von ca. 0,01 s bis 3 min nach der Singularität entstanden. Dabei ist die Temperatur durch die Expansion von 10^{11}K auf 10^9K abgesunken. Bevor die Nukleosynthese stattfinden konnte gab es einige wichtige Phasen die durchlaufen wurden und die die Nukleosynthese wesentlich beeinflusst haben

3.1 Phase I: Gleichgewicht

Zunächst befinden wir uns 0,01 s nach der Singularität bei $T=10^{11}\text{K}$ und $E=10\text{MeV}$. Protonen und Neutronen sind im thermodynamischen Gleichgewicht, sie können sich nach folgenden Reaktionen der schwachen Wechselwirkung ineinander umwandeln:



Das Verhältnis der Teilchenzahlen zwischen Neutronen und Protonen ergibt sich aus der Boltzmann-Verteilung:

$$\frac{n}{p} = e^{-Q/T} \quad (15)$$

$$Q = 1,293\text{MeV} \quad (16)$$

Die Wechselwirkungsrate dieser Reaktionen ist proportional zu T^5 , d. h. mit der fortlaufenden Expansion und der damit verbundenen Abkühlung werden die Reaktionen immer unwahrscheinlicher.

3.2 Phase II: Ausfrieren

Bei $E=1\text{MeV}$, $T=10^{10}\text{K}$, $t=1\text{s}$ frieren die Neutronen aus, das heißt es werden keine Neutronen mehr gebildet. Damit verbunden ist auch die Entkopplung der Neutrinos, da diese nur über die schwache Wechselwirkung mit anderen Teilchen wechselwirken können. Das Verhältnis von Neutronen zu Protonen stellt sich somit auf einen Wert ein von:

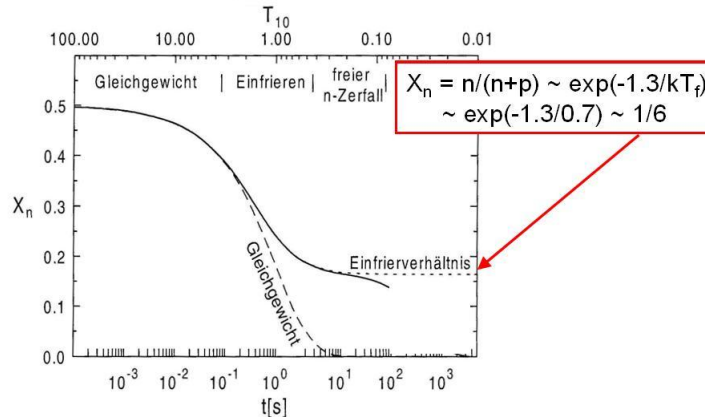
$$\frac{n}{p} = \frac{1}{6} \quad (17)$$

3.3 Phase III: Neutronenzerfall

Die einzige Reaktion, die noch stattfindet ist der β^- -Zerfall.



Dieser verschiebt mit einer Halbwertszeit von $\tau = 887s$ das Verhältnis weiter zu Gunsten der Protonen. Dieser freie Neutronenzerfall wird erst durch das Einsetzen der Nukleosynthese gestoppt. Die ersten Deuterium-Kernen können sich bei $E=0,1$ MeV und $T=10^9$ K bilden. Vorher gibt es genügend energiereiche Photonen, die die Bindungsenergie des Deuteriums von 2,2 MeV aufbringen und dieses sofort wieder zerstören. Bis die Deuteriumbildung einsetzt hat sich das Neutronen-Protonen-Verhältnis auf $\frac{n}{p} = \frac{1}{7}$ verschoben. Der zeitliche Verlauf des n/p -Verhältnisses ist im Folgenden graphisch dargestellt:



4 Big Bang Nukleosynthese

Sobald die Häufigkeit der energiereichen Photonen weit genug abgesunken ist ($E=0,1$ MeV und $T=10^9$ K) können sich die Deuteriumkerne dauerhaft bilden. Das ist der Beginn der Nukleosynthese. Zunächst bildet sich Deuterium, welches dann weiter zu ${}^3\text{He}$ oder ${}^3\text{H}$ reagieren kann. Wichtige Reaktionen sind also:



Insgesamt werden die leichten Elemente auf über 100 Reaktionspfaden mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit gebildet, 12 davon sind dominierend und alle enden bei ${}^4\text{He}$. So kommt es, dass nahezu alle freien Neutronen, die zu Beginn der BBN vorhanden waren zu ${}^4\text{He}$ -Kernen reagieren. Die anderen Elemente (${}^3\text{He}$, D, Li) werden nur in Spuren gebildet.

Geht man von einem n/p -Verhältnis von $1/7$ zu Beginn der BBN aus, so kann man folgende Abschätzung für den Massenanteil Y_p des ${}^4\text{He}$ machen. Da ein ${}^4\text{He}$ -Kern 2 Protonen und 2 Neutronen besitzt ergibt sich:

$$Y_p = \frac{2n_n}{n_n + n_p} = \frac{2\frac{n}{p}}{\frac{n}{p} + 1} \approx 0,25 \quad (23)$$

Man kann also als Ergebnis der BBN folgende Häufigkeiten der verschiedenen Elemente festhalten:

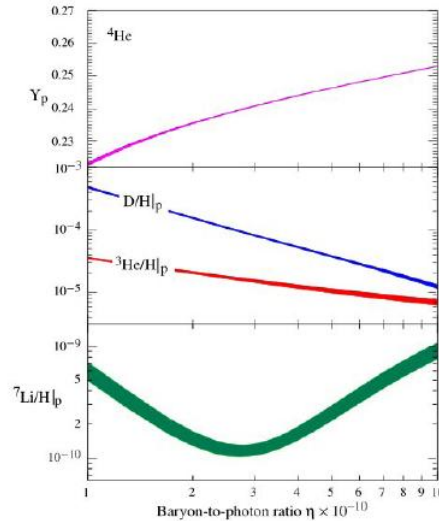
- 25% ${}^4\text{He}$ und 75% H
- $\frac{D}{H}, \frac{{}^3\text{He}}{H} \approx 10^{-5}$
- $\frac{{}^7\text{Li}}{H} \approx 10^{-10}$

4.1 Baryonen-Photonen-Verhältnis

Die Ergebnisse der BBN hängen ab von einem einzigen freien Parameter und zwar dem Verhältnis von Baryonen zu Photonen η :

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 10^{-10} \quad (24)$$

η bestimmt im wesentlichen wann die Bildung von Deuterium einsetzen kann und somit auch welche Voraussetzungen zu Beginn der Nukleosynthese vorliegen. Eine Auftragung der erwarteten Elementhäufigkeiten über η sieht dann so aus:

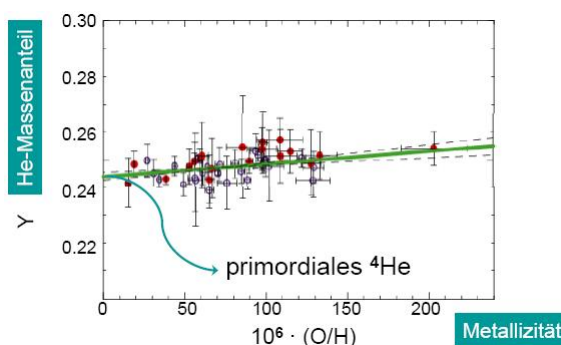


5 Messung der Elementhäufigkeiten

Um die Prognosen der Theorie zu überprüfen müssen die primordialen Elementhäufigkeiten gemessen werden. Die Schwierigkeit liegt dabei darin, dass es seit der BBN eine chemische Evolution im Universum gegeben hat. Es sind schwere Elemente entstanden, in Sternen wurde Helium gebildet, Lithium wurde verbrannt usw. Um das zu berücksichtigen misst man die Häufigkeiten oft in Abhängigkeit von der Metallizität, also dem Vorkommen schwerer Elemente und extrapoliert dann zu null Metallizität um die primordialen Werte zu erhalten.

5.1 ⁴He-Messung

⁴He misst man in sog. Blue Compact Dwarf Galaxien, das sind junge Zwerggalaxien, die noch eine sehr geringe Metallizität aufweisen. Dort werden H II Regionen, also Regionen mit ionisiertem Wasserstoff und ionisiertem Helium, beobachtet. Durch Intensitätsmessungen der Rekombinationslinie des ⁴He (587,6 nm) kann man die Häufigkeit beispielsweise in Abhängigkeit von Sauerstoff messen und dann die oben erwähnte Extrapolation durchführen.



Als Ergebnis erhält man einen Wert, der sehr gut mit der Theorie übereinstimmt:

$$Y_p = 0,249 \pm 0,009 \quad (25)$$

5.2 D-Messung

Für Deuterium sind keine Quellen in unserem Universum bekannt. Allerdings wird es in Sternen zu ${}^3\text{He}$ verbrannt ($\text{D} + \text{p} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$). Das heißt jede Messung liefert eine untere Grenze für die primordiale D-Häufigkeit und eine obere Grenze für η . Um Deuterium zu messen benötigt man ein QAS (Quasar Absorption System), das bedeutet man beobachtet die Strahlung eines Quasars durch absorbierende Wasserstoffwolken mit hoher Rotverschiebung. Aus dem Absorptionsspektrum von Wasserstoff und Deuterium kann dann die relative Häufigkeit bestimmt werden. Speziell beobachtet man die Lyman α -Absorptionslinie die bei 121,6 nm liegt, durch die Rotverschiebung der Wolken wird sie aber in den sichtbaren Bereich verschoben. Diese Messmethode ist mit einigen Problemen behaftet. Zum einen gibt es nur eine Handvoll geeigneter QAS. Da sich Deuterium und Wasserstoff nur durch ein Neutron unterscheiden liegen die Absorptionslinien sehr dicht beieinander ($\Delta E/E=2,7 \cdot 10^{-4}$). Außerdem sind die Linien durch die Rotation der Wasserstoffwolken dopplerverbreitert und der Intensitätsunterschied der H zur D-Linie ist enorm ($10^5:1$).

Nimmt man den Durchschnitt aus den 6 genauesten QAS-Messungen erhält man ein Ergebnis, welches ebenfalls in die Größenordnung der Theorie fällt:

$$\frac{D}{H}|_p = (2,84 \pm 0,26) \cdot 10^{-5} \quad (26)$$

5.3 Li-Messung

Um die Häufigkeit von Lithium zu bestimmen stellt man Messungen in unserer Galaxie an. Dazu werden spektroskopische Messungen der Atmosphäre an metallarmen Population II Sternen in unserem galaktischen Halo durchgeführt. Diese Sterne müssen eine Oberflächentemperatur > 5500 K haben, da nur dann die Konvektionszone dünn genug ist. Bei Sternen mit breiter Konvektionszone wird das Lithium ins Innere des Sterns transportiert und dort verbrannt (${}^7\text{Li} + \text{p} = 2 {}^4\text{He}$).

Auch hier wird in Abhängigkeit von der Metallizität gemessen und zu Null extrapoliert:

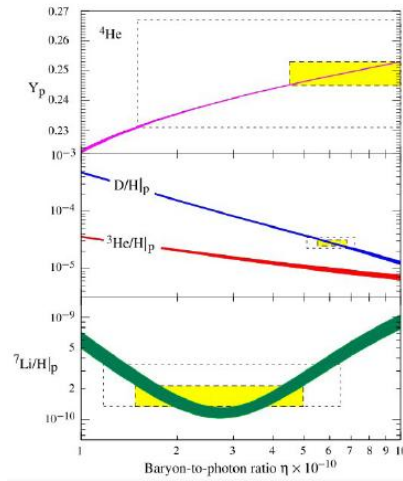
$$\frac{Li}{H}|_p = (1,7 \pm 0,02_{-0}^{+1,1}) \cdot 10^{-10} \quad (27)$$

5.4 ${}^3\text{He}$ -Messung

Bei ${}^3\text{He}$ hat man nur Daten aus unserem Sonnensystem und metallreichen H II Regionen der Milchstraße. Diese Daten widersprechen sogar den Modellen für die stellare Nukleosynthese. Auf Grund dieser Umstände wird die ${}^3\text{He}$ -Häufigkeit nicht mehr als Messgröße verwendet.

5.5 Messergebnisse

In folgendem Schaubild sind die Messergebnisse in die Erwartungen der Theorie eingetragen



gelb: statistische Unsicherheit

gestrichelt: statistische + systematische Unsicherheit

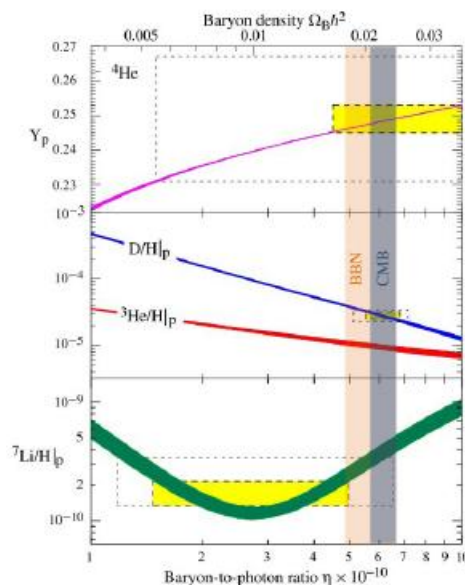
Da sich unter allen drei Messwerten eine Übereinstimmung finden lässt, ist zunächst mal eine Konsistenz der Theorie gegeben. Desweiteren kann man durch die Messungen eine Aussage über η treffen.

6 Schlussfolgerung

Aus den Messungen der Elementhäufigkeiten und der Theorie der BBN kann das Baryonen zu Photonen Verhältnis bestimmt werden:

$$4,7 \leq \eta_{10} \leq 6,5 \quad (28)$$

Außerdem kann aus Messungen der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) die Baryonendichte ermittelt werden. Das bemerkenswerte ist, dass auch dieser Wert in das bisher beschriebene passt (siehe Grafik).



Vergleicht man das Ergebnis für die Baryonendichte $\Omega_B = 4\%$ mit der gesamten Materiedichte $\Omega_m = 24\%$ lässt sich auf ein weiteres interessantes Thema der Kosmologie schließen, nämlich die Existenz von nichtbaryonischer, dunkler Materie.

7 Fazit

In der Big Bang Nukleosynthese rechnet man mit bekannter Physik (Thermodynamik und Kernphysik) zurück bis 0,01 s nach der Singularität. Die Prognosen die getroffen werden überspannen zehn Größenordnungen und können experimentell bestätigt werden. Außerdem hat man eine unabhängige Bestätigung durch die kosmische Hintergrundstrahlung. Somit ist die BBN eine wichtige Stütze für die Big Bang Theorie und ein Hinweis auf die Existenz von dunkler Materie.